אינסוף
מתמטיקה

אשכול התמצאות במישור ובמרחב · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35372

ראייה מרחבית: סידור קוביות

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

מבנים מקוביות, תרשים מספרים ומבטים הם שאלה שנראית כמו חידה, אבל מאחוריה שלושה כללים פשוטים. **תלמיד** ילמד כאן לעבור בביטחון בין מבנה, תרשים ומבטים. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2023–2026 ורצף הוראה. בסוף הקובץ תרגול מודרך, פתרונות עם טעות, תרגול עצמאי ומעורב, תשובות ורמזים.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. מושגי היסוד **2**

3. מהסרטוט לתרשים המספרים **3**

4. מהתרשים למבטים: שלושה כללים **4**

5. מספר הקוביות ונפח **5**

6. משימות שינוי: הוספה והורדה **5**

7. ממבטים למבנה: יותר מאפשרות אחת **6**

8. טיפים וטריקים **7**

9. טעויות נפוצות **7**

10. למורה: רצף הוראה מוצע **8**

11. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **9**

תרגיל 1: מהסרטוט לתרשים ולמבטים 9

תרגיל 2: מהתרשים למבנה ולמבטים 11

תרגיל 3: איזה מבנה מתאים למבטים? 13

תרגיל 4: הוספה מקסימלית בלי לשנות את המבט מימין 15

תרגיל 5: הורדה מקסימלית בלי לשנות מבט 17

תרגיל 6: מבט מלפנים זהה למבט מאחור 19

תרגיל 7: השוואה בין שלושה מבנים 21

תרגיל 8: ממבטים למבנה: מקסימום ומינימום 22

תרגיל 9: השלמה למבנה בצורת קובייה 24

תרגיל 10: בניין דירות: מגדל מוסתר (שאלה מסכמת) 26

12. תרגול נוסף **28**

13. תשובות ורמזים **34**

14. דף סיכום **36**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בשאלון 35372 מופיעה שאלה אחת בראייה מרחבית, בפרק השני תחת הכותרת «אשכול התמצאות במישור ובמרחב». נתון סרטוט של מבנה מקוביות זהות, וחץ שמסמן את כיוון המבט מלפנים. המשפט הקבוע בשאלה הוא: **«כל קובייה במבנה מונחת על המשטח או על קובייה אחרת»**.

מועד	שאלה	מספר מבנים	מה נשאל
קיץ 2023	5	2	איזה מבנה מתאים לשני מבטים נתונים, השלמת מבטים, תרשים מספרים, הפרש נפחים לפי אורך צלע
קיץ 2024 א	6	1	זיהוי מבט נתון, מבט משמאל, תרשים מספרים, השלמה למבנה בצורת קובייה
קיץ 2024 ב	6	2	התאמת תרשים מספרים חלקי למבנה, מבט מלמעלה, הפרש בין מספרי קוביות, היגדים נכון או לא נכון
קיץ 2025 א	5	1	תרשים מספרים, מבט מימין ומבט משמאל, הורדת המספר הגדול ביותר של קוביות בלי לשנות את המבט מלמעלה
קיץ 2025 ב	5	1	מבט מלפנים ומבט מימין, הוספת המספר הגדול ביותר של קוביות בלי לשנות את המבט מימין, איזה מבט נוסף לא השתנה
קיץ 2026 א	5	1	מבט מימין ומבט מלפנים, תרשים מספרים, הוספת קובייה כך שהמבט מלפנים יהיה זהה למבט מאחור, הורדת קוביות ואיזה מבט השתנה
קיץ 2026 ב	5	3	תרשים מספרים, מבט מימין, השוואה בין שלושה מבנים (מספר קוביות, מבטים זהים), הוספה מינימלית להשוואת מבטים

מה לומדים מהטבלה

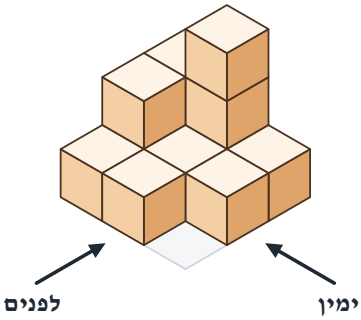
בכל מועד נדרשים **תרשים מספרים** ו**מבט אחד לפחות**. המשימה הקשה יותר היא שינוי במבנה: הוספה או הורדה של קוביות תחת תנאי על המבטים. כל המשימות האלה נפתרות **על התרשים** ולא על הציור, ולכן הצעד הראשון תמיד זהה: לכתוב תרשים מספרים.

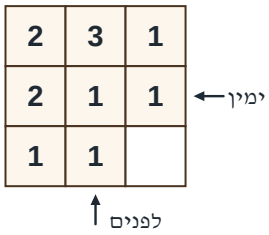
מה יש בדף הנוסחאות

לנושא הזה אין נוסחה ייעודית בדף הנוסחאות, פרט לנפח קובייה $V = a^3$. כל הכלים בחוברת הם כללי חשיבה, ואפשר לנמק אותם בכמה מילים.

2. מושגי היסוד

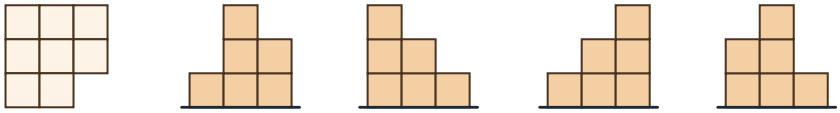
כל הסרטוטים בחוברת נקראים כך: החץ **לפנים** מסמן את הכיוון שממנו מסתכלים במבט מלפנים, והחץ **ימין** את הכיוון שממנו מסתכלים במבט מימין.





המבנה

תרשים מספרים



מבט מלפנים | מבט מימין | מבט משמאל | מבט מאחור | מבט מלמעלה

המושג	המשמעות
מגדל	כל הקוביות שנמצאות באותה משבצת על המשטח, זו על גבי זו.
תרשים מספרים	הבסיס של המבנה במבט מלמעלה. בכל משבצת רשום גובה המגדל. משבצת ריקה פירושה שאין שם קוביות.
מבט מלפנים	מה שרואה מי שעומד מול המבנה מכיוון החץ. רואים רק צללית: לא רואים עומק.
מבט מימין, משמאל, מאחור	אותו דבר, מהצד המתאים.
מבט מלמעלה	צורת הבסיס בלבד: אילו משבצות תפוסות. אין בו מידע על גובה.

אינטואיציה: למה המשפט «מונחת על המשטח או על קובייה אחרת» כל כך חשוב?

כי הוא אומר שאין קוביות מרחפות ואין חורים. לכן מספיק לדעת את גובה המגדל בכל משבצת כדי לדעת את כל המבנה, ותרשים המספרים הוא תיאור מלא שלו. זו הסיבה שאפשר לפתור הכול על התרשים.

למורה: מוסכמת הכיוון

בחוברת זו השורה התחתונה בתרשים היא הקרובה אל מי שמסתכל מלפנים, והצד הימני של התרשים הוא צד ימין שלו, בהתאם לסימוני הכיוון «לפנים» ו«ימין» שבדוגמה בתוכנית הלימודים. אם על התבנית בבחינה מופיע סימון כיוון, פועלים לפיו. כדאי להרגיל את התלמידים לכתוב ליד כל תרשים את שתי המילים האלה.

3. מהסרטוט לתרשים המספרים

1. **מתמקמים:** מאתרים את החץ ומסמנים על המבנה: הצד שאליו מכוון החץ הוא «לפנים», וצד ימין הוא ימין של מי שעומד שם.
2. **סופרים פאות עליונות:** כל פאה עליונה גלויה שייכת למגדל אחר, ולכן כך מגלים כמה משבצות תפוסות.
3. **מתחילים בפינה הקרובה:** שם כל המגדל גלוי. כותבים את גובהו בתרשים.
4. **ממשיכים אחורה ושמאלה:** מגדל שעומד מאחורי שכנו נראה רק בחלקו. הגובה שלו הוא גובה השכן ועוד הקוביות שבולטות מעליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

5 **בודקים:** מסתכלים על הגובה של מדרגות סמוכות בסרטוט, ומשווים למספרים שכתבתם.

טריק: שתי בדיקות מהירות

בדיקה א: הגובה המקסימלי שמופיע בתרשים חייב להיות גובה המגדל הגבוה בסרטוט.
בדיקה ב: ציירו מבט מלפנים לפי התרשים והשוו לסרטוט: הצללית חייבת להתאים למה שרואים מכיוון החץ.

טעות נפוצה

סופרים רק קוביות גלויות. בסרטוט רואים לעיתים שתי קוביות של מגדל אחורי, אבל הוא נמשך עד הקרקע. לכן סופרים מגדלים ולא פאות.

4. מהתרשים למבטים: שלושה כללים

בתרשים המספרים **טור** הוא אנכי (מלפנים לאחור), **ושורה** היא אופקית (משמאל לימין). בחוברת רצף גבהים של מבט נכתב תמיד משמאל לימין, כמו בסרטוט המבט.

המבט	הכלל	סדר הקריאה בסרטוט המבט (משמאל לימין)
מלפנים	בכל **טור** של התרשים לוקחים את המספר הגדול ביותר	מהטור השמאלי לטור הימני
מימין	בכל **שורה** של התרשים לוקחים את המספר הגדול ביותר	מהשורה הקרובה (לפנים) לשורה הרחוקה (מאחור)
מאחור	תמונת ראי של המבט מלפנים	מהטור הימני לטור השמאלי
משמאל	תמונת ראי של המבט מימין	מהשורה הרחוקה לשורה הקרובה
מלמעלה	המשבצות התפוסות בתרשים, בלי מספרים	כמו התרשים עצמו

נימוק: למה לוקחים את המקסימום?

מי שמסתכל מלפנים רואה את כל המגדלים שבאותו טור זה מאחורי זה. המגדל הגבוה מסתיר את הנמוכים, ואף מגדל לא מסתיר משהו גבוה ממנו. לכן בכל טור הצללית מגיעה בדיוק לגובה המגדל הגבוה ביותר. מכאן גם נובע: **מבט אינו משתנה כל עוד המקסימום בכל טור נשאר אותו דבר**. זה המפתח לכל שאלות ההוספה וההורדה.

נימוק: למה מאחור ומשמאל הם תמונות ראי?

מי שעומד מאחורי המבנה רואה אותה צללית בדיוק, אבל מה שהיה בצד ימין נמצא עכשיו בצד שמאל שלו. לכן מספיק לחשב שני מבטים, וכל השאר מתקבל בהיפוך.

הסדר במבט מימין: מקור הטעויות העיקרי

כשעומדים מימין למבנה ומסתכלים לעברו, החלק הקדמי של המבנה נמצא ליד היד **השמאלית**. לכן בסרטוט המבט מימין העמודה השמאלית שייכת לשורה הקרובה (לפנים).

טריק: סיבוב הדף

מסובבים את הדף כך שהצד הימני של התרשים יהיה קרוב אליכם, ומקריאים אותו כאילו זה מבט מלפנים. לסיבוב ימינה (עם כיוון השעון) מתקבל המבט מימין, לסיבוב שמאלה המבט משמאל, ולסיבוב של חצי סיבוב המבט מאחור.

© אור בן שטרית · אינסוף



התרשים המקורי — מסובב עם כיוון השעון: קוראים אותו כמו מבט מלפנים

בדוגמה שבסרטוט, אחרי הסיבוב המקסימום בכל טור, משמאל לימין, הוא 1, 2, 3, וזה בדיוק המבט מימין.

כמה בדיקות בלי חישוב

- הגובה המקסימלי זהה בכל ארבעת המבטים הצדדיים: הוא גובה המגדל הגבוה ביותר.
- מספר העמודות במבט מלפנים הוא מספר הטורים בתרשים, ומספר העמודות במבט מימין הוא מספר השורות.
- טור ריק בתרשים נראה במבט כרווח: לא «מצמידים» את העמודות.

5. מספר הקוביות ונפח

מספר הקוביות במבנה הוא **סכום כל המספרים בתרשים**. אם אורך הצלע של כל קובייה הוא a, נפח המבנה הוא:

$$V = N \cdot a^3$$

כאשר N הוא מספר הקוביות. לדוגמה, 12 קוביות שצלען 3 ס״מ הן $V = 27 \cdot 12 = 324$ סמ״ק.

טעות נפוצה

כותבים $V = N \cdot a$ או $V = 3N$. נפח של קובייה אחת הוא a^3. אם מבקשים הפרש נפחים, מחשבים הפרש קוביות וכופלים ב־a^3.

6. משימות שינוי: הוספה והורדה

כל המשימות האלה נפתרות על התרשים, לפי השאלה **«מה המקסימום בכל טור או שורה, ומה מותר לשנות?»**

המשימה	הפעולה על התרשים	מספר הקוביות
להוסיף כמה שיותר בלי לשנות את **המבט מימין**	בכל שורה מעלים כל מגדל למקסימום של השורה	סכום התרשים החדש פחות N
להוסיף כמה שיותר בלי לשנות את **המבט מלפנים**	בכל טור מעלים כל מגדל למקסימום של הטור	סכום התרשים החדש פחות N
להוריד כמה שיותר בלי לשנות את **המבט מלמעלה**	משאירים 1 בכל משבצת תפוסה	N פחות מספר המשבצות התפוסות
להוריד כמה שיותר בלי לשנות את **המבט מלפנים**	בכל טור משאירים רק מגדל אחד, הגבוה ביותר	N פחות סכום עמודות המבט

© אור בן שטרית · אינסוף

המשימה	הפעולה על התרשים	מספר הקוביות
לגרום **למבט מלפנים להיות זהה למבט מאחור**	המבט צריך להיות סימטרי: מעלים את העמודה הנמוכה בכל זוג סימטרי	סכום ההפרשים בזוגות
להשלים למבנה בצורת קובייה	בוחרים n: הגדול מבין מספר השורות, מספר הטורים והגובה המקסימלי	$n^3 - N$

נימוק: למה ההוספה נעצרת במקסימום של השורה?

במבט מימין כל שורה מיוצגת במספר אחד, הגובה המקסימלי בה. כל עוד המגדלים נמוכים מהמקסימום או שווים לו, הצללית לא משתנה. קובייה אחת מעל המקסימום כבר תשנה את המבט, ולכן זה הגבול. בדרך זו מתקבל גם המספר הגדול ביותר: אי אפשר להעלות אף מגדל יותר מזה.

למורה: הבהרה חשובה על «הגדול ביותר האפשרי»

אם מותר להאריך את המבנה מעבר לתבנית, אפשר להוסיף קוביות בלי סוף במבט מימין, על ידי הארכת שורות. לכן הניסוח נקרא תמיד **בתוך התבנית** שבה מסורטט המבנה: מעלים מגדלים קיימים, ואפשר למלא גם משבצת ריקה שבתוך התבנית. כדאי לומר זאת במפורש בכיתה, ולפתור את הדוגמה גם עם משבצת ריקה.

אינטואיציה: סיפור של צללית

דמיינו את המבט כצל על קיר. אפשר להוסיף קוביות כרצונכם «בתוך הצל» ולהסיר כרצונכם מה שלא בונה את קו הגובה. רק קובייה שמגדילה את הצל, או קובייה שהסרתה מקטינה אותו, משנה את המבט.

7. ממבטים למבנה: יותר מאפשרות אחת

מבטים לא קובעים תמיד מבנה יחיד, כי הם מראים רק את המקסימום בכל טור ושורה. נתונים מבט מלמעלה, מבט מלפנים ומבט מימין. כיצד מוצאים את הגבולות?

מספר הקוביות הגדול ביותר

בכל משבצת תפוסה כותבים את **הקטן** מבין שני הגבולות: גובה העמודה במבט מלפנים וגובה העמודה במבט מימין. מגדל גבוה יותר היה משנה מבט.

מספר הקוביות הקטן ביותר

בכל משבצת תפוסה מניחים קובייה אחת לפחות. אחר כך דואגים שכל טור ושורה יגיעו למקסימום שלהם, ומנסים לשתף: מגדל אחד יכול לשרת גם טור וגם שורה בעלי אותו גובה.

נימוק: למה המינימום של שני הגבולות?

מגדל במשבצת שייך לטור אחד ולשורה אחת. אם הוא גבוה מהמקסימום של הטור, המבט מלפנים ישתנה, ואם הוא גבוה מהמקסימום של השורה, המבט מימין ישתנה. לכן הגובה חייב להיות קטן משני הגבולות או שווה להם, והערך הגדול ביותר שמקיים זאת הוא הקטן מביניהם.

טיפ: בדיקת עקביות

אחרי שכתבתם תרשים, חשבו ממנו מחדש את שני המבטים והשוו לנתון. אם בטור מסוים אף מגדל לא מגיע לגובה הדרוש, התרשים לא מתאים. בפרט, הגובה המקסימלי במבט מלפנים חייב להיות שווה לגובה המקסימלי במבט מימין.

© אור בן שטרית · אינסוף

למורה

שאלה טובה לדיון: «האם אפשר לבנות שני מבנים שונים עם אותם שלושה מבטים?» התלמידים יכולים לנסות עם קוביות אמיתיות. התשובה מדגישה את מטרת תוכנית הלימודים: מבט אחד או שניים אינם מספיקים כדי לקבוע את צורת המבנה, ולעיתים גם שלושה אינם מספיקים.

8. טיפים וטריקים

1. **תרשים קודם כול:** גם אם מבקשים מבט, קודם כותבים תרשים מספרים, ורק אז קוראים ממנו.
2. **כותבים כיוונים:** «לפנים» מתחת לתרשים ו«ימין» לצדו. זה לוקח שתי שניות ומונע את הטעות הנפוצה ביותר.
3. **מקיפים את המקסימום:** מקיפים בעיגול את המספר הגדול ביותר בכל טור ובכל שורה. המבטים נקראים מיד.
4. **מחשבים שני מבטים בלבד:** מלפנים ומימין. מאחור ומשמאל מתקבלים בהיפוך הסדר.
5. **סיבוב הדף:** לא בטוחים בסדר של מבט מימין? מסובבים את הדף.
6. **מבט מלמעלה בלי מספרים:** רק ריבועים. מבט מלמעלה אינו משתנה כשמוסיפים קוביות על מגדלים קיימים.
7. **סופרים פעמיים:** סכום התרשים ובדיקה לפי שורות וטורים. טעות חיבור קטנה עולה בכל המשך השאלה.
8. **בהוספה ובהורדה:** כותבים תרשים חדש, ואז מחסירים סכומים. קל יותר מלספור קוביות בראש.
9. **«איזה מבט לא השתנה?»:** מחשבים מחדש את המבטים מהתרשים החדש, ומשווים אחד אחד.
10. **ציור מדויק:** את המבטים מסרטטים על התבנית כריבועים שלמים, צמודים לקו הקרקע.

9. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
מבט מימין בסדר הפוך	קוראים את השורות מלמעלה למטה בתרשים	משמאל לימין: מהשורה הקרובה לשורה הרחוקה
סכום במקום מקסימום	מחברים את המגדלים בטור	במבט רואים צללית, ולכן לוקחים רק את הגבוה
סופרים רק קוביות גלויות	שוכחים קוביות מתחת למגדל	סופרים מגדלים: סכום התרשים
מבט מלמעלה עם מספרים או גבהים	מתבלבלים עם תרשים מספרים	מבט מלמעלה הוא צורת הבסיס בלבד
משמיטים רווח של טור ריק	מצמידים עמודות בציור המבט	טור ריק נשאר רווח ברוחב של משבצת
בהורדה משאירים 0 במשבצת שנדרשת למבט מלמעלה	מרוקנים מגדל שלם	כדי לשמור על מבט מלמעלה משאירים לפחות 1
«להשלים לקובייה» עם n קטן מדי	בוחרים לפי הבסיס בלבד	n הוא הגדול מבין מספר השורות, הטורים והגובה
נפח: $N \cdot a$ במקום $N \cdot a^3$	שוכחים שאורך צלע אינו נפח	נפח של קובייה אחת: a^3

10. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים מקצה ליחידת הראייה המרחבית 10 שעות. מומלץ מאוד לעבוד עם קוביות אמיתיות (או יישומון תלת־ממדי) לפחות בשני השלבים הראשונים.

שלב	שעות	מטרה	פעילות או שאלה מנחה
למה צריך מבטים	2	תיאור מבנה מנקודות מבט שונות	«תארו לחבר, בלי להראות לו, את המבנה שעל השולחן שלכם»
ספירה ותרשים	2	מעבר בין מבנה לתרשים מספרים, קוביות מוסתרות	בניית מבנה לפי תרשים, בזוגות, בלי לדבר
מבטים מתוך תרשים	3	כללי המקסימום, סיבוב הדף, תמונות ראי	«מה תראה אם תקום ותעמוד בצד השני של השולחן?»
משימות שינוי ומבטים למבנה	2	הוספה, הורדה, מקסימום ומינימום של קוביות	«כמה קוביות אפשר להוריד בלי שאף אחד ישים לב מהכיוון הזה?»
שילוב לקראת בגרות	1	שאלה מלאה בתבנית בחינה	פתרון על התרשים בלבד, ובדיקה במבנה אמיתי

למורה: הבדלים בין תלמידים

יכולת הדמיון המרחבי שונה מאוד מתלמיד לתלמיד, והיא ניתנת לאימון. לתלמיד שמתקשה תנו מיד לבנות את המבנה מקוביות. לתלמיד חזק תנו את הכללים האלגבריים של התרשים ושאלות מינימום ומקסימום. הכללים מבטיחים שגם תלמיד בעל דמיון מרחבי מוגבל יכול לפתור את השאלה במלואה.

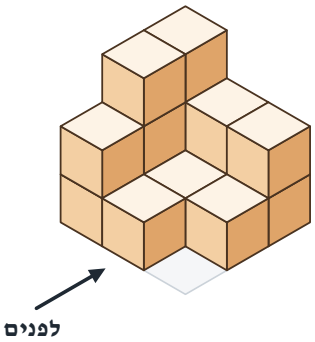
© אור בן שטרית · אינסוף

11. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. בכל הסרטוטים הקוביות זהות, וכל קובייה מונחת על המשטח או על קובייה אחרת. החץ מסמן את כיוון המבט מלפנים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 מהסרטוט לתרשים ולמבטים

בסרטוט מבנה הבנוי מקוביות זהות.



מבנה

א. סרטטו את תרשים המספרים של המבנה.

ב. כמה קוביות במבנה?

ג. סרטטו את המבט מלפנים ואת המבט מימין של המבנה.

ד. סרטטו את המבט מאחור ואת המבט משמאל.

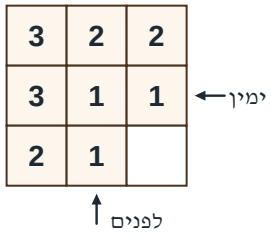
ה. סרטטו את המבט מלמעלה.

מה מתרגלים: קריאת סרטוט, תרשים מספרים, ספירה, כלל המקסימום, תמונות ראי

פתרון מלא

סעיף א

מתחילים בפינה הקרובה: במשבצת הקדמית הימנית אין מגדל. בשורה הקדמית, משמאל לימין, הגבהים הם 2 ו־1. בשורה האמצעית הגבהים הם 3, 1, 1, ובשורה האחורית 3, 2, 2.



תרשים מספרים

סעיף ב

$$N = (3 + 2 + 2) + (3 + 1 + 1) + (2 + 1) = 15$$

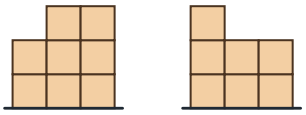
© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: 15 קוביות.

סעיף ג

מלפנים: המספר הגדול ביותר בכל טור, משמאל לימין. טור ראשון: 2, 3, 3, ולכן 3. שני: 1, 1, 2, ולכן 2. שלישי: 1, 2, ולכן 2. העמודות הן 2, 2, 3.

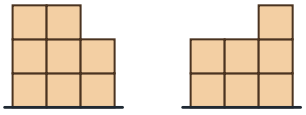
מימין: המקסימום בכל שורה, מהקרובה לרחוקה: בשורה הקדמית 2, באמצעית 3, באחורית 3. העמודות, משמאל לימין, הן 3, 3, 2.



מבט מלפנים מבט מימין

סעיף ד

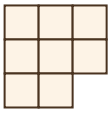
המבט מאחור הוא היפוך של המבט מלפנים: 3, 2, 2. המבט משמאל הוא היפוך של המבט מימין: 2, 3, 3.



מבט מאחור מבט משמאל

סעיף ה

מסמנים את המשבצות התפוסות: הכול, פרט למשבצת הקדמית הימנית.

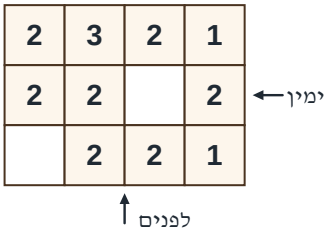


מבט מלמעלה

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 2 מהתרשים למבנה ולמבטים

לפניכם תרשים המספרים של מבנה הבנוי מקוביות זהות.



תרשים מספרים

א. כמה קוביות במבנה?

ב. מהו גובה המגדל הגבוה ביותר, וכמה מגדלים כאלה יש?

ג. סרטטו את המבט מלפנים ואת המבט מימין.

ד. סרטטו את המבט מאחור ואת המבט משמאל.

ה. כמה ריבועים יש במבט מלמעלה?

מה מתרגלים: תרשים נתון: ספירה, מבטים בלי סרטוט, משבצות ריקות

פתרון מלא

סעיף א

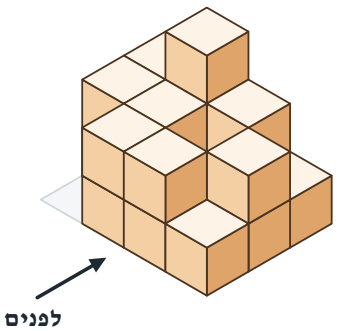
$$N = (2+3+2+1) + (2+2+2) + (2+2+1) = 8 + 6 + 5 = 19$$

תשובה: 19 קוביות.

סעיף ב

המספר הגדול ביותר בתרשים הוא 3, והוא מופיע פעם אחת.

תשובה: גובה 3, מגדל אחד.



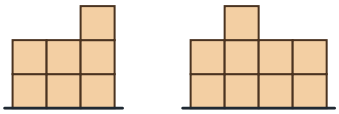
המבנה שנבנה לפי התרשים

סעיף ג

מלפנים: המספר הגדול ביותר בכל טור. טור ראשון: 2, 2, ולכן 2. שני: 2, 3, ולכן 3. שלישי: 2, 2, ולכן 2. רביעי: 1, 2, 1, ולכן 2. העמודות: 2, 3, 2, 2.

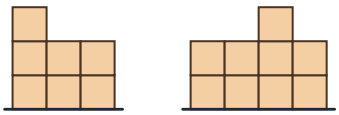
© אור בן שטרית · אינסוף

מימין: המספר הגדול ביותר בכל שורה. קדמית: 1, 2, 2, ולכן 2. אמצעית: 2, 2, 2, ולכן 2. אחורית: 1, 2, 3, 2, ולכן 3. העמודות: 3, 2, 2.



מבט מלפנים מבט מימין

סעיף ד



מבט מאחור מבט משמאל

מאחור: 2, 3, 2, 2. משמאל: 2, 2, 3.

סעיף ה

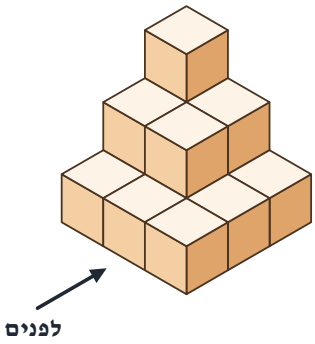
סופרים משבצות שאינן ריקות: 4 בשורה האחורית, 3 באמצעית ו־3 בקדמית.

תשובה: 10 ריבועים.

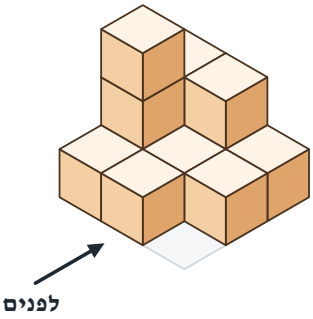
© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 3 איזה מבנה מתאים למבטים?

בסרטוט שני מבנים הבנויים מקוביות זהות.

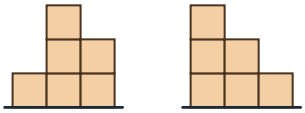


מבנה 1



מבנה 2

לפניכם שני מבטים של אחד המבנים:



מבט מלפנים

מבט מימין

א. קבעו איזה מבנה מתאים לשני המבטים. נמקו.

ב. סרטטו את המבט מימין של המבנה השני.

ג. סרטטו את תרשימי המספרים של שני המבנים.

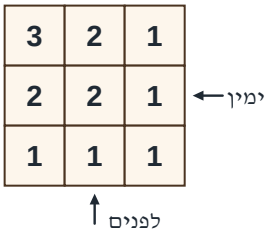
ד. אורך הצלע של כל קובייה הוא 3 ס״מ. בכמה גדול נפח מבנה 1 מנפח מבנה 2?

מה מתרגלים: התאמה בין מבנים למבטים, הבנה שמבט אחד אינו מספיק, הפרש נפחים

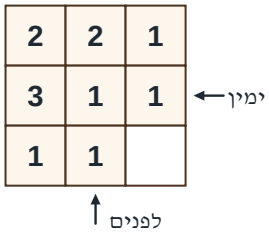
פתרון מלא

סעיף ג

נתחיל מהתרשימים, כי כל שאר הסעיפים נפתרים מהם.



מבנה 1



מבנה 2

© אור בן שטרית · אינסוף

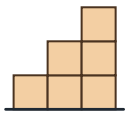
סעיף א

	מבט מלפנים	מבט מימין (מקדימה לאחור)
מבנה 1	3, 2, 1	1, 2, 3
מבנה 2	3, 2, 1	1, 3, 2
נתון	3, 2, 1	1, 3, 2

המבט מלפנים לבדו לא מספיק להכריע, כי הוא זהה בשני המבנים. המבט מימין מכריע: במבנה 2 המגדל הגבוה נמצא בשורה האמצעית, וזה מה שרואים בעמודה האמצעית של המבט הנתון.

תשובה: מבנה 2.

סעיף ב



מבט מימין של מבנה 1

סעיף ד

מספר הקוביות: במבנה 1 $6+5+3=14$, ובמבנה 2 $5+5+2=12$. ההפרש הוא 2 קוביות, ונפח של קובייה אחת הוא $3^3=27$ סמ״ק:

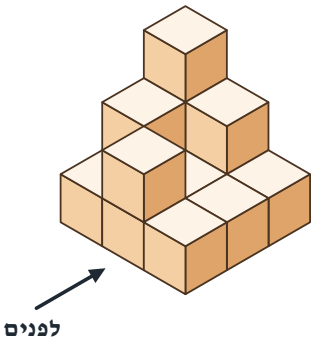
$$2\cdot 27=54$$

תשובה: ב־54 סמ״ק.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 4 הוספה מקסימלית בלי לשנות את המבט מימין

בסרטוט מבנה הבנוי מקוביות זהות.



מבנה

א. סרטטו את תרשים המספרים של המבנה ומצאו את מספר הקוביות.

ב. סרטטו את המבט מלפנים ואת המבט מימין.

ג. מוסיפים למבנה, בתוך התבנית שלו, את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מימין לא ישתנה.

(1) כמה קוביות הוסיפו?

(2) סרטטו את תרשים המספרים לאחר ההוספה.

ד. איזה מבט, מלבד המבט מימין, לא השתנה בהכרח: משמאל, מלפנים או מאחור? נמקו.

מה מתרגלים: כלל המקסימום לפי שורה, בניית תרשים חדש, קשר בין מבט מימין למבט משמאל

פתרון מלא

סעיף א

3	2	1
2	1	1
1	2	1

ימין ←

↑ לפנים

תרשים מספרים

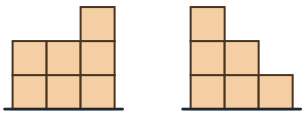
$$N = (3 + 2 + 1) + (2 + 1 + 1) + (1 + 2 + 1) = 14$$

תשובה: 14 קוביות.

סעיף ב

מלפנים: בטורים המקסימום הוא 3, 2, 1. מימין, מהשורה הקדמית לאחורית: 2, 2, 3.

© אור בן שטרית · אינסוף

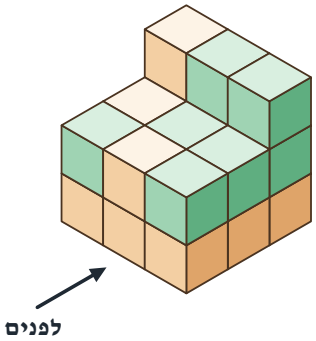


מבט מלפנים מבט מימין

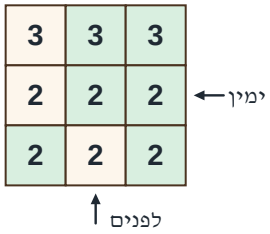
סעיף ג

המבט מימין נקבע מהמקסימום של כל שורה. לכן מעלים כל מגדל למקסימום של השורה שלו:

- שורה אחורית (מקסימום 3): מ־3, 2, 1 ל־3, 3, 3, כלומר מוסיפים $3 + 2 + 1 + 0$.
- שורה אמצעית (מקסימום 2): מ־2, 1, 1 ל־2, 2, 2, כלומר מוסיפים $2 + 1 + 1 + 0$.
- שורה קדמית (מקסימום 2): מ־1, 2, 1 ל־2, 2, 2, כלומר מוסיפים $1 + 0 + 1 + 2$.



הקוביות שנוספו בירוק



אחרי ההוספה (המשבצות שהשתנו צבועות)

תשובה: (1) הוסיפו $7 = 2 + 2 + 3$ קוביות. (2) ראו את התרשים. בדיקה: $21 = 14 + 7 = 9 + 6 + 6$.

סעיף ד

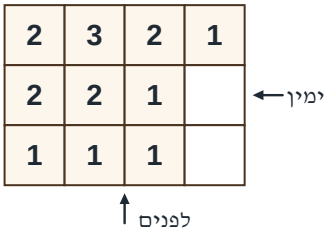
המבט משמאל הוא תמונת ראי של המבט מימין, ולכן אם המבט מימין לא השתנה, גם הוא לא השתנה.
המבט מלפנים השתנה מ־3, 2, 1 ל־3, 3, 3, ולכן גם המבט מאחור השתנה.

תשובה: המבט משמאל.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 5 הורדה מקסימלית בלי לשנות מבט

לפניכם תרשים המספרים של מבנה הבנוי מקוביות זהות.



תרשים מספרים

א. כמה קוביות במבנה, וכמה ריבועים במבט מלמעלה?

ב. מורידים מהמבנה את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מלמעלה לא ישתנה.
(1) כמה קוביות הורידו?
(2) כמה קוביות נשארו?

ג. חוזרים למבנה המקורי. מורידים את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך ש**גם** המבט מלמעלה **וגם** המבט מלפנים לא ישתנו. כמה קוביות הורידו? סרטטו תרשים מספרים אפשרי.

ד. חוזרים למבנה המקורי. מורידים את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שרק המבט מלפנים לא ישתנה (מותר לרוקן משבצות). כמה קוביות נשארו?

מה מתרגלים: מבט מלמעלה מול מבט מלפנים, הורדה תחת תנאי אחד ותחת שני תנאים

פתרון מלא

סעיף א

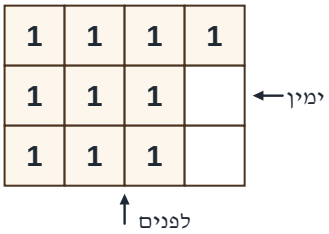
$$N = (2+3+2+1) + (2+2+1) + (1+1+1) = 8 + 5 + 3 = 16$$

משבצות תפוסות: 4 בשורה האחורית, 3 באמצעית ו־3 בקדמית.

תשובה: 16 קוביות, ו־10 ריבועים במבט מלמעלה.

סעיף ב

המבט מלמעלה מראה רק אילו משבצות תפוסות. כדי לשמור עליו מספיק להשאיר קובייה אחת בכל משבצת תפוסה.



קובייה אחת בכל משבצת תפוסה

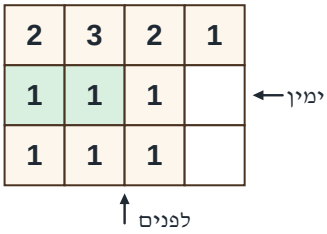
תשובה: (1) הורידו $16 - 10 = 6$ קוביות. (2) נשארו 10 קוביות.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ג

המבט מלפנים הוא $2, 3, 2, 1$. בכל טור חייב להישאר מגדל אחד בגובה המקסימלי, ובכל משבצת אחרת קובייה אחת:

- טור 1 ($2, 2, 1$): נשארים למשל $2, 1, 1$, ומורידים קובייה אחת.
- טור 2 ($3, 2, 1$): נשארים למשל $3, 1, 1$, ומורידים קובייה אחת.
- טור 3 ($2, 1, 1$): אי אפשר להוריד.
- טור 4 (1): אי אפשר להוריד.



תרשים אפשרי אחרי הורדת 2 קוביות

תשובה: הורידו 2 קוביות.

סעיף ד

כעת מותר לרוקן משבצות. בכל טור מספיק להשאיר מגדל אחד בגובה המקסימלי, ולכן מספר הקוביות שנשארות שווה לסכום עמודות המבט:

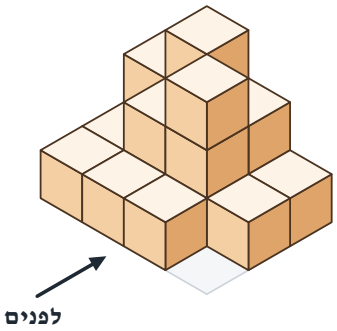
$$2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

תשובה: נשארו 8 קוביות (הורידו 8).

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 6 מבט מלפנים זהה למבט מאחור

בסרטוט מבנה הבנוי מקוביות זהות.



מבנה

א. סרטטו את תרשים המספרים של המבנה ואת המבט מלפנים.

ב. מוסיפים למבנה קובייה אחת כך שהמבט מלפנים יהיה זהה למבט מאחור. סרטטו תרשים מספרים אפשרי לאחר ההוספה.

ג. מורידים את הקובייה שהוסיפו. לאחר מכן מורידים עוד קוביות, ומתקבל תרשים המספרים הבא:

2	2	2	1
1	2	2	1
1	1	1	

ימין ←

לפנים ↑

תרשים המספרים החדש

(1) כמה קוביות הורידו מהמבנה המקורי?

(2) איזה מבט **לא** השתנה: מלפנים, מימין, משמאל או מלמעלה? נמקו.

מה מתרגלים: סימטריה של מבט, הוספת קובייה בעלת משמעות, השוואת מבטים לפני ואחרי

פתרון מלא

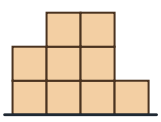
סעיף א

2	3	2	1
1	2	3	1
1	1	1	

ימין ←

לפנים ↑

תרשים מספרים



מבט מלפנים

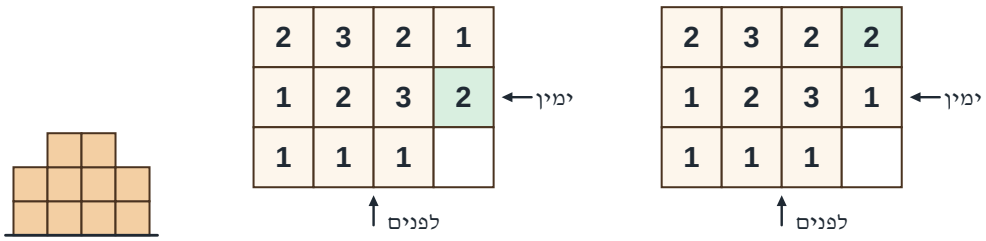
המקסימום בטורים, משמאל לימין: 2, 3, 3, 1.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ב

המבט מאחור הוא היפוך של המבט מלפנים, ולכן הם זהים רק כאשר סדרת העמודות **סימטרית**. הסדרה 2, 3, 3, 1 אינה סימטרית: בזוג החיצוני יש 2 ו־1. צריך להעלות את הטור הימני מ־1 ל־2.

הקובייה חייבת להגיע לגובה 2, ולכן מניחים אותה על מגדל בגובה 1 בטור הזה. במשבצת הקדמית של הטור אין מגדל, ולכן יש שתי אפשרויות:



אפשרות 1 | אפשרות 2 | המבט החדש מלפנים

תשובה: העמודות החדשות הן 2, 3, 3, 2. כל אחד משני התרשימים מתאים.

סעיף ג

(1) מספר הקוביות המקורי: $3 + 7 + 8 = 18$. בתרשים החדש: $3 + 6 + 7 = 16$. כלומר הורידו 2 קוביות מהמבנה המקורי.

(2) בודקים כל מבט:

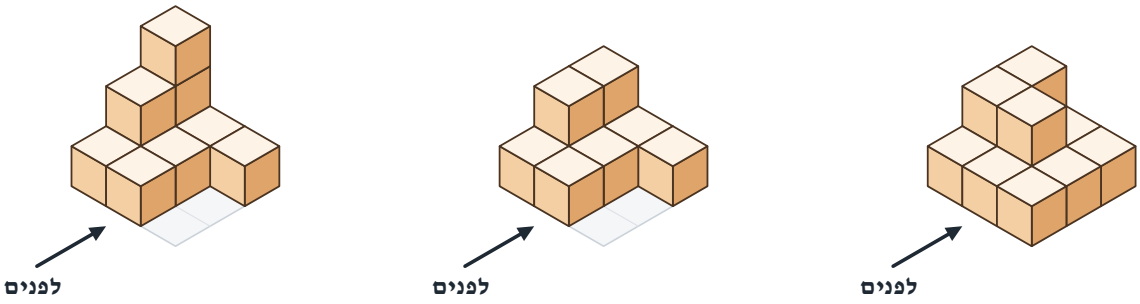
המבט	לפני	אחרי	השתנה?
מלפנים	2, 3, 3, 1	2, 2, 2, 1	כן
מימין	1, 3, 3	1, 2, 2	כן
משמאל	3, 3, 1	2, 2, 1	כן
מלמעלה	11 משבצות	אותן 11 משבצות	לא

תשובה: (1) 2 קוביות. (2) המבט מלמעלה: אף משבצת לא התרוקנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 7 השוואה בין שלושה מבנים

בסרטוט שלושה מבנים הבנויים מקוביות זהות.



מבנה I | מבנה II | מבנה III

א. באיזה מבנה מספר הקוביות הוא הקטן ביותר? נמקו.

ב. לאילו שני מבנים המבט מלמעלה זהה?

ג. לאילו שני מבנים המבט מימין זהה?

ד. מוסיפים למבנה II את מספר הקוביות הקטן ביותר האפשרי כך שהמבט מלפנים שלו יהיה זהה למבט מלפנים של מבנה I.

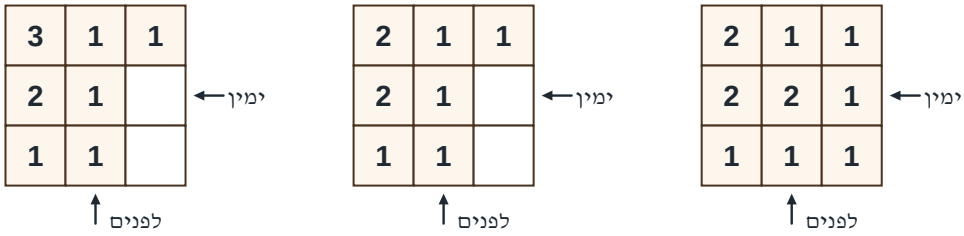
(1) כמה קוביות הוסיפו?

(2) היכן אפשר להוסיף אותן כך שהמבט מימין של מבנה II לא ישתנה? סרטטו תרשים מספרים אפשרי.

מה מתרגלים: השוואה שיטתית בטבלה, מינימום הוספה, השפעה של מיקום הקובייה על מבט אחר

פתרון מלא

כותבים את שלושת התרשימים ומהם את המבטים:



מבנה I | מבנה II | מבנה III

	מספר קוביות	מבט מלפנים	מבט מימין	משבצות תפוסות
I	12	2, 2, 1	1, 2, 2	9
II	9	2, 1, 1	1, 2, 2	7
III	10	3, 1, 1	1, 2, 3	7

סעיף א

תשובה: במבנה II, שבו 9 קוביות: $2 + 3 + 4 = 9$.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ב

במבנים II ו־III אותן משבצות תפוסות, ובשניהם המשבצות הימניות בשורה האמצעית ובשורה הקדמית ריקות.

תשובה: מבנים II ו־III.

סעיף ג

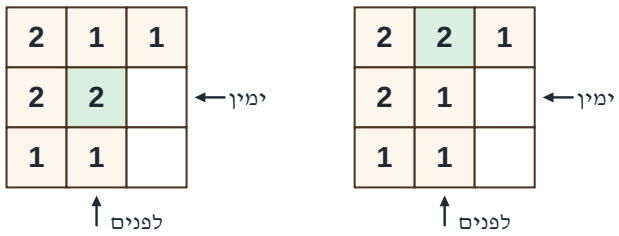
תשובה: מבנים I ו־II: בשניהם העמודות הן 1, 2, 2.

סעיף ד

(1) המבט מלפנים של מבנה II הוא 2, 1, 1, ושל מבנה I הוא 1, 2, 2. רק הטור האמצעי שונה: צריך להעלות אותו מ־1 ל־2, וזו קובייה אחת.

(2) הקובייה עולה על אחד המגדלים בטור האמצעי:

- בשורה האחורית: המקסימום של השורה נשאר 2, והמבט מימין לא משתנה.
- בשורה האמצעית: המקסימום של השורה נשאר 2, והמבט מימין לא משתנה.
- בשורה הקדמית: המקסימום של השורה עולה מ־1 ל־2, והמבט מימין **משתנה**.

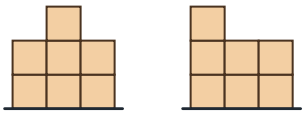


אפשרות 1 אפשרות 2

תשובה: (1) קובייה אחת. (2) על המגדל האמצעי שבשורה האחורית, או על המגדל האמצעי שבשורה האמצעית.

תרגיל 8 ממבטים למבנה: מקסימום ומינימום

מבנה בנוי מקוביות זהות. בסיס המבנה הוא ריבוע של 3×3 משבצות, וכל המשבצות תפוסות. לפניכם המבט מלפנים והמבט מימין:



מבט מלפנים מבט מימין

א. מצאו את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי במבנה. סרטטו את תרשים המספרים.

ב. מצאו את מספר הקוביות הקטן ביותר האפשרי במבנה. סרטטו תרשים מספרים מתאים.

ג. האם יכול להיות מגדל בגובה 3 במשבצת אחרת? נמקו.

מה מתרגלים: כלל המינימום של שני גבולות, בניית מבנה מינימלי, שיתוף מגדל בין טור לשורה

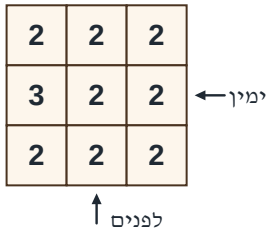
© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

מלפנים העמודות הן 3, 2, 2 (טורים), ומימין 2, 3, 2 (שורות, מהקדמית לאחורית). בכל משבצת הגובה הגדול ביותר האפשרי הוא **הקטן** מבין הגבולות של הטור ושל השורה:

	טור 1 (עד 3)	טור 2 (עד 2)	טור 3 (עד 2)
שורה אחורית (עד 2)	2	2	2
שורה אמצעית (עד 3)	3	2	2
שורה קדמית (עד 2)	2	2	2



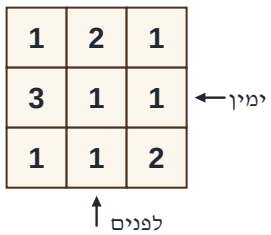
המבנה המקסימלי

תשובה: $N = 6 + 7 + 6 = 19$ קוביות.

סעיף ב

כל משבצת תפוסה, ולכן מתחילים ב־9 קוביות, אחת בכל משבצת. כעת דואגים לגבהים הדרושים:

- טור 1 צריך מגדל בגובה 3. הוא חייב להיות בשורה האמצעית, כי רק בה מותר 3. המגדל הזה מטפל גם בשורה האמצעית. נוספו 2 קוביות.
- טור 2 צריך מגדל בגובה 2, וגם השורה האחורית צריכה 2. מגדל אחד בטור 2 ובשורה האחורית מטפל בשניהם. נוספה קובייה אחת.
- טור 3 צריך מגדל בגובה 2, וגם השורה הקדמית צריכה 2. מגדל אחד בטור 3 ובשורה הקדמית מטפל בשניהם. נוספה קובייה אחת.



מבנה מינימלי

בדיקה: בטורים המקסימום הוא 3, 2, 2, ובשורות (מקדימה לאחור) 2, 3, 2. זה בדיוק הנתון.

תשובה: $N = 9 + 2 + 1 + 1 = 13$ קוביות.

© אור בן שטרית · אינסוף

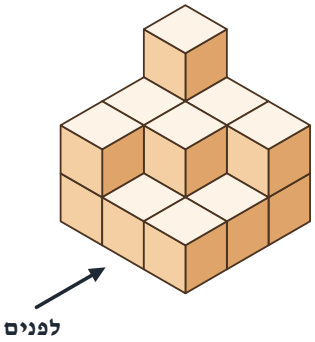
סעיף ג

גובה 3 מותר רק במשבצת שבה גם הטור וגם השורה מאפשרים 3. רק טור 1 מאפשר 3, ורק השורה האמצעית מאפשרת 3, ולכן יש משבצת אחת כזו בלבד.

תשובה: לא. המגדל בגובה 3 חייב להיות בטור 1 ובשורה האמצעית.

תרגיל 9 השלמה למבנה בצורת קובייה

בסרטוט מבנה הבנוי מקוביות זהות.



מבנה

א. סרטטו את תרשים המספרים של המבנה ומצאו את מספר הקוביות.

ב. על גבי הקוביות שבמבנה מוסיפים קוביות עד שמתקבל מבנה חדש בצורת קובייה. כמה קוביות מוסיפים?

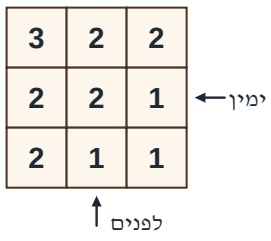
ג. אורך הצלע של כל קובייה הוא 2 ס״מ. מצאו את נפח המבנה המקורי ואת נפח הקובייה הגדולה.

ד. במבנה אחר, זהה למבנה הנתון, הוסיפו קובייה אחת מעל המגדל הגבוה ביותר. כמה קוביות צריך להוסיף למבנה האחר כדי להשלימו למבנה בצורת קובייה? נמקו.

מה מתרגלים: תרשים, השלמה לקובייה, נפח לפי אורך צלע, בחירה נכונה של n

פתרון מלא

סעיף א



תרשים מספרים

$$N = (3 + 2 + 2) + (2 + 2 + 1) + (2 + 1 + 1) = 7 + 5 + 4 = 16$$

תשובה: 16 קוביות.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ב

הבסיס הוא 3×3, והגובה המקסימלי הוא 3, ולכן $n = 3$. בקובייה גדולה יש $3^3 = 27$ קוביות:

$$27 - 16 = 11$$

בדרך נוספת, על התרשים: בכל משבצת משלימים ל־3: $(0 + 1 + 1) + (1 + 1 + 2) + (1 + 2 + 2) = 11$.

תשובה: מוסיפים 11 קוביות.

סעיף ג

נפח של קובייה קטנה הוא $2^3 = 8$ סמ״ק:

$$V_1 = 16 \cdot 8 = 128 \qquad V_2 = 27 \cdot 8 = 216$$

בדיקה: הצלע של הקובייה הגדולה היא $3 \cdot 2 = 6$ ס״מ, ו־$6^3 = 216$.

תשובה: נפח המבנה הוא 128 סמ״ק, ונפח הקובייה הגדולה הוא 216 סמ״ק.

סעיף ד

במבנה האחר 17 קוביות, והגובה המקסימלי הוא 4. קובייה גדולה חייבת להכיל את המגדל הזה, ולכן $n = 4$. בבסיס של הקובייה הגדולה יש 4×4 משבצות, ולכן השלמה דורשת גם להרחיב את הבסיס.

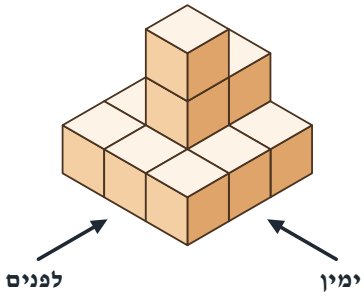
$$4^3 - 17 = 64 - 17 = 47$$

תשובה: 47 קוביות, כי n נקבע לפי הממד הגדול ביותר של המבנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 10 בניין דירות: מגדל מוסתר (שאלה מסכמת)

בניין בנוי מדירות זהות בצורת קובייה, וכל דירה מונחת על הקרקע או על דירה אחרת. בסיס הבניין הוא ריבוע של 3×3 משבצות. בסרטוט רואים את הבניין מהכיוון שמסומן בחץ ומימין. המשבצת שבפינה השמאלית האחורית אינה נראית בסרטוט, כי היא מוסתרת.



הבניין (המשבצת האחורית השמאלית לא נראית)

א. כתבו את תרשים המספרים של החלק הנראה של הבניין. סמנו ב־h את גובה המגדל שבמשבצת המוסתרת.

ב. אילו ערכים של h אפשריים? נמקו.

ג. כמה דירות יכולות להיות בבניין? כתבו את כל האפשרויות.

ד. התברר שהמבט מלפנים של הבניין הוא $2, 3, 1$. כמה דירות יש בבניין?

ה. אילו המבט מלפנים היה $1, 3, 1$, האם היה אפשר לקבוע את מספר הדירות? איזה מבט נוסף היה מכריע? נמקו.

מה מתרגלים: קוביות מוסתרות, הסקה מתוך מבטים, הבנה של מה כל מבט מגלה ומה אינו מגלה

פתרון מלא

סעיף א

קוראים את הסרטוט שורה אחר שורה, מהקרובה לרחוקה: שורה קדמית $1, 1, 1$; שורה אמצעית $1, 3, 1$; שורה אחורית $h, 1, 2$.

	2	1
1	3	1
1	1	1

ימין ←

↑ לפנים

החלק הנראה של התרשים (המשבצת הריקה היא הנסתרת)

סעיף ב

המגדל המוסתר עומד מאחורי המגדל שגובהו 3 שבמרכז. קו הראייה לפינה הזו עולה קובייה אחת בכל צעד אלכסוני, ולכן המגדל המרכזי מסתיר את כל מה שגובהו עד $3 - 1 = 2$. מגדל בגובה 3 כבר היה בולט ונראה בסרטוט.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: $h=0$, $h=1$ או $h=2$.

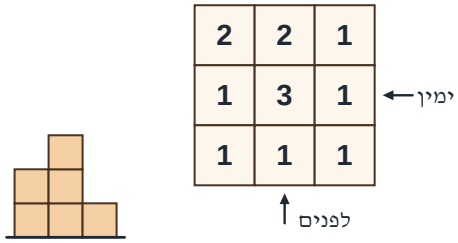
סעיף ג

סכום החלק הנראה: $(2+1)+(1+3+1)+(1+1+1)=3+5+3=11$.

תשובה: 11 או 12 או 13 דירות.

סעיף ד

בטור השמאלי המגדלים הם h, 1, 1, ולכן עמודת המבט מלפנים היא המקסימום ביניהם. היא שווה ל־2 רק אם $h=2$.



התרשים המלא, $h=2$

מבט מלפנים

תשובה: $h=2$, ולכן $11+2=13$ דירות.

סעיף ה

אם עמודת המבט היא 1, אז המספר הגדול ביותר מבין h, 1, 1 הוא 1, כלומר $h=0$ או $h=1$. שתי האפשרויות נותנות אותו מבט מלפנים, וכך גם אותו מבט מימין, ולכן הן אינן מספיקות. המבט מלמעלה מכריע: אם המשבצת תפוסה, $h=1$, ואם היא ריקה, $h=0$.

תשובה: לא היה אפשר לקבוע: 11 דירות או 12 דירות. המבט מלמעלה היה מכריע.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי ותרגול מעורב. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ. בכל התרגילים הקוביות זהות, וכל קובייה מונחת על המשטח או על קובייה אחרת.

תרגיל מודרך 1 מהתרשים למבטים

לפניכם תרשים המספרים של מבנה. מצאו את מספר הקוביות ואת המבטים מלפנים, מימין, מאחור ומשמאל.

1	2	1	3
2	1		1
1	1		

ימין ←

↑ לפנים

השלימו את הפתרון

מספר הקוביות: _____ = _____ + _____ + 7 = N.

מלפנים (המקסימום בכל טור, משמאל לימין): _____ .

מימין (המקסימום בכל שורה, מהקדמית לאחורית): _____ .

מאחור (היפוך של המבט מלפנים): _____ .

משמאל (היפוך של המבט מימין): _____ .

מה מתרגלים: ספירה, כלל המקסימום, תמונות ראי

תרגיל מודרך 2 הוספה בלי לשנות את המבט מלפנים

מוסיפים למבנה, בתוך התבנית שלו, את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מלפנים לא ישתנה. כמה קוביות מוסיפים?

2	1	1
1	1	2
1		1

ימין ←

↑ לפנים

השלימו את הפתרון

המבט מלפנים: _____ .

בכל טור מעלים כל מגדל למקסימום של הטור. בתרשים החדש כל שורה היא: _____ .

מספר הקוביות בתרשים החדש: _____ . מספר הקוביות במבנה הנתון: _____ .

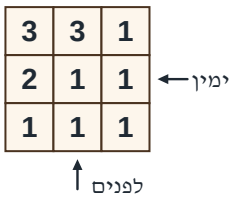
מוסיפים: _____ = _____ − _____ קוביות.

מה מתרגלים: הוספה מקסימלית, משבצת ריקה בתוך התבנית

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל מודרך 3 השלמה לקובייה ונפח

על גבי הקוביות שבמבנה מוסיפים קוביות עד שמתקבל מבנה בצורת קובייה.
כמה קוביות מוסיפים? אורך הצלע של כל קובייה הוא 2 ס״מ. מהו נפח המבנה הנתון?



השלימו את הפתרון

הבסיס הוא 3×3, והגובה המקסימלי הוא _____ , ולכן $n =$ _____.

מספר הקוביות במבנה: $N =$ _____. בקובייה הגדולה: $n^3 =$ _____.

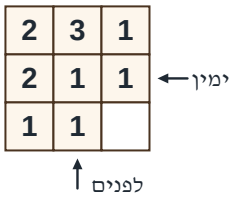
מוסיפים: _____ = _____ − _____ קוביות.

נפח של קובייה אחת: _____ סמ״ק. נפח המבנה: _____ = _____ · _____ סמ״ק.

מה מתרגלים: בחירת n, הפרש קוביות, נפח לפי אורך צלע

מצאו את הטעות 1 סדר הקריאה במבט מימין

לפניכם תרשים המספרים של מבנה. מצאו את המבט מימין.



הפתרון של התלמיד

שורה 1	המקסימום בשורה האחורית הוא 3, בשורה האמצעית 2, ובשורה הקדמית 1.
שורה 2	במבט קוראים את העמודות משמאל לימין באותו סדר, מהשורה העליונה בתרשים לשורה התחתונה.
שורה 3	המבט מימין: 3, 2, 1.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

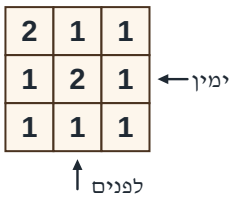
ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: כיוון הקריאה במבט מימין

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 2 סכום או מקסימום?

לפניכם תרשים המספרים של מבנה. מצאו את המבט מלפנים.



הפתרון של התלמיד

שורה 1 במבט מלפנים רואים את כל המגדלים שבטור, זה מאחורי זה.

שורה 2 לכן גובה כל עמודה במבט הוא סכום המגדלים בטור.

שורה 3 המבט מלפנים: 4, 4, 3.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: צללית ולא סכום

מצאו את הטעות 3 נפח של מבנה

מבנה בנוי מ־12 קוביות שאורך הצלע של כל אחת מהן 2 ס״מ. מצאו את נפח המבנה.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 במבנה 12 קוביות.

שורה 2 הנפח של קובייה אחת הוא 2 סמ״ק.

שורה 3 $V = 12 \cdot 2 = 24$ סמ״ק

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ההבדל בין אורך צלע לנפח

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 4 השלמה לקובייה

על גבי הקוביות שבמבנה מוסיפים קוביות עד שמתקבל מבנה בצורת קובייה.
כמה קוביות מוסיפים?

4	2	1
2	1	1
1	1	1

ימין ←
↑ לפנים

הפתרון של התלמיד

שורה 1 הבסיס הוא 3×3, ולכן $n = 3$.

שורה 2 בקובייה הגדולה יש $3^3 = 27$ קוביות.

שורה 3 במבנה יש 14 קוביות, ולכן מוסיפים $27 - 14 = 13$ קוביות.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

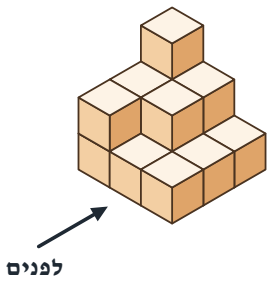
ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: n נקבע לפי הממד הגדול ביותר

תרגול עצמאי תרשימים, מבטים ושינויים

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. כתבו את תרשים המספרים של המבנה, ומצאו את מספר הקוביות.



2. מצאו את מספר הקוביות, את המבט מלפנים ואת המבט מימין.

1	2	3
2	1	1
	1	1

ימין ←
↑ לפנים

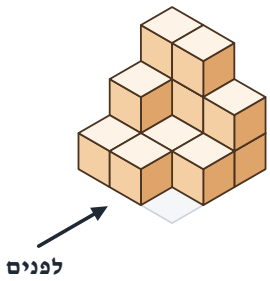
3. מצאו את המבט מאחור ואת המבט משמאל.

2	1	2	1
1	3	1	
1	1		

ימין ←
↑ לפנים

© אור בן שטרית · אינסוף

4. כמה ריבועים יש במבט מלמעלה, וכמה קוביות במבנה?



5. מוסיפים למבנה, בתוך התבנית שלו, את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מימין לא ישתנה. כמה קוביות מוסיפים?

3	1	1
2	2	1
1		1

ימין ←

↑ לפנים

6. מורידים את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מלמעלה לא ישתנה. כמה קוביות מורידים, וכמה נשארות?

3	2	2
2	1	
1	1	1

ימין ←

↑ לפנים

7. מורידים את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מימין לא ישתנה, ומותר לרוקן משבצות. כמה קוביות נשארות?

2	3	1
2	1	1
1	1	1

ימין ←

↑ לפנים

8. (א) נפח של מבנה בן 8 קוביות הוא 216 סמ״ק. מהו אורך הצלע של כל קובייה? (ב) מהו הנפח של מבנה בן 20 קוביות כאלה?

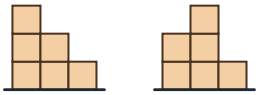
9. מוסיפים את מספר הקוביות הקטן ביותר האפשרי כך שהמבט מלפנים יהיה זהה למבט מאחור. כמה קוביות מוסיפים?

3	1	2	1
1	1	1	2
1		1	1

ימין ←

↑ לפנים

10. בסיס המבנה הוא ריבוע של 3×3 משבצות, וכל המשבצות תפוסות. בסרטוט המבט מלפנים והמבט מימין. מצאו את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי במבנה.

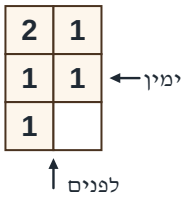


מבט מלפנים מבט מימין

11. עבור אותם מבטים ואותו בסיס כמו בתרגיל הקודם, מצאו את מספר הקוביות הקטן ביותר האפשרי במבנה.

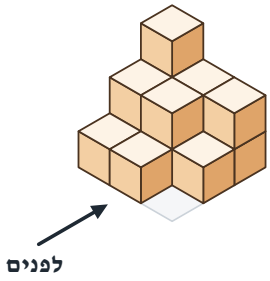
© אור בן שטרית · אינסוף

12. על גבי הקוביות שבמבנה מוסיפים קוביות עד שמתקבל מבנה בצורת קובייה. כמה קוביות מוסיפים?

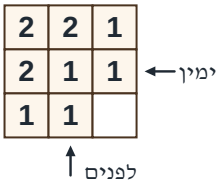


תרגול מעורב שאלות מסכמות

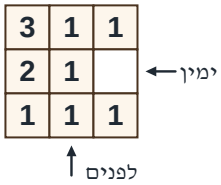
13. במחסן מאחסנים ארגזים בצורת קובייה שאורך הצלע שלהם 50 ס״מ. כל ארגז מונח על הרצפה או על ארגז אחר. בסרטוט נראית ערימת הארגזים. (א) כתבו את תרשים המספרים, ומצאו את מספר הארגזים. (ב) סרטטו את המבט מלפנים ואת המבט מימין. (ג) מצאו את נפח הערימה במטרים מעוקבים. (ד) מוסיפים לערימה, בתוך התבנית שלה, את מספר הארגזים הגדול ביותר האפשרי כך שהמבט מימין לא ישתנה. כמה ארגזים מוסיפים?



14. בסרטוט תרשימי המספרים של שני מבנים. (א) הראו שבשני המבנים אותו מספר קוביות. (ב) האם המבט מלמעלה זהה בשני המבנים? נמקו. (ג) מוסיפים למבנה I את מספר הקוביות הקטן ביותר האפשרי כך שהמבט מימין שלו יהיה זהה למבט מימין של מבנה II. כמה קוביות מוסיפים, והיכן?



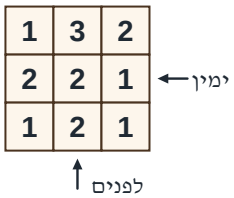
מבנה I



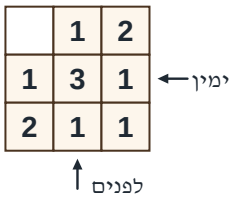
מבנה II

15. נכון או לא נכון? נמקו. (א) לשני מבנים בעלי אותו מספר קוביות יש אותו מבט מלפנים. (ב) המבט מאחור הוא תמונת ראי של המבט מלפנים. (ג) אם מוסיפים קובייה על מגדל קיים, המבט מלמעלה לא משתנה. (ד) כשמורידים קובייה מהמבנה, לפחות אחד מהמבטים משתנה. (ה) ייתכן שלשני מבנים שונים יהיו אותם מבטים מלפנים, מימין ומלמעלה.

16. (א) מצאו את מספר הקוביות, את המבט מלפנים ואת המבט מימין. (ב) האם המבט מלפנים זהה למבט מאחור? נמקו. (ג) מורידים את מספר הקוביות הגדול ביותר האפשרי כך שגם המבט מלפנים וגם המבט מלמעלה לא ישתנו. כמה קוביות מורידים? (ד) כמה קוביות צריך להוסיף למבנה המקורי כדי לקבל מבנה בצורת קובייה?



17. בתרשים המספרים של מבנה חסר מספר אחד: גובה המגדל h שבמשבצת הריקה. ייתכן גם ש־$h=0$. (א) נתון שהמבט מלפנים הוא 3, 3, 2. מצאו את h ואת מספר הקוביות. (ב) נתון שהמבט מלפנים הוא 2, 3, 2. אילו ערכים של h אפשריים? (ג) בסעיף ב, איזה מבט מבחין בין $h=0$ לבין $h=1$? נמקו.



משבצת ריקה: גובה h

© אור בן שטרית · אינסוף

13. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

3. חשבו קודם את המבט מלפנים ואת המבט מימין, והפכו את הסדר.

5. גם משבצת ריקה בתוך התבנית אפשר למלא.

9. סדרת העמודות חייבת להיות סימטרית.

10. בכל משבצת כותבים את הקטן מבין גבול הטור וגבול השורה.

11. מגדל אחד יכול לשרת טור ושורה בעלי אותו גובה.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

$N = 7 + 4 + 2 = 13$; מלפנים 2, 2, 1, 3; מימין 1, 2, 3; מאחור 3, 1, 2, 2; משמאל 3, 2, 1.

תרגיל מודרך 2

מלפנים 2, 1, 2; בכל שורה 2, 1, 2; 15 קוביות לעומת 10; $15 - 10 = 5$ קוביות. גם המשבצת הריקה מתמלאת.

תרגיל מודרך 3

גובה $n = 3$; $N = 14$, $n^3 = 27$; $27 - 14 = 13$ קוביות; 8 סמ״ק; $14 \cdot 8 = 112$ סמ״ק.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: מי שעומד מימין רואה את החלק הקדמי של המבנה בצד שמאל שלו, ולכן העמודה השמאלית שייכת לשורה הקדמית. המבט מימין הוא 1, 2, 3.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: המגדלים מסתירים זה את זה, ולכן גובה העמודה הוא המקסימום בטור. המבט מלפנים הוא 2, 2, 1.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: נפח של קובייה הוא חזקה שלישית של אורך הצלע: $2^3 = 8$ סמ״ק. לכן $V = 12 \cdot 8 = 96$ סמ״ק.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 1: בתרשים יש מגדל בגובה 4, ולכן $n = 4$. מוסיפים $64 - 14 = 50$ קוביות.

תשובות לתרגול העצמאי

1. שורה אחורית 3, 2, 1; שורה אמצעית 2, 2, 1; שורה קדמית 2, 1, 1. $N = 15$.

2. $N = 12$; מלפנים 2, 2, 3; מימין 1, 2, 3.

3. מאחור 1, 2, 3, 2; משמאל 2, 3, 1.

4. 8 ריבועים; 14 קוביות.

5. בכל שורה מעלים למקסימום של השורה: $18 - 12 = 6$ קוביות.

6. מורידים $13 - 8 = 5$ קוביות, ונשארות 8.

7. המבט מימין הוא 1, 2, 3, ולכן נשארות $1 + 2 + 3 = 6$ קוביות.

8. (א) $216 \div 8 = 27$, ולכן אורך הצלע 3 ס״מ. (ב) $20 \cdot 27 = 540$ סמ״ק.

9. המבט מלפנים הוא 3, 1, 2, 2. מעלים את הטור הימני ל־3 ואת הטור השני ל־2, ומקבלים 3, 2, 2, 3. מוסיפים 2 קוביות.

10. שורה אחורית 1, 1, 1; שורה אמצעית 2, 2, 1; שורה קדמית 2, 3, 1. $N = 14$.

11. $N = 12$: קובייה בכל משבצת, מגדל בגובה 3 בטור האמצעי ובשורה הקדמית, ומגדל בגובה 2 בטור השמאלי ובשורה האמצעית.

12. $n = 3$, כי בתרשים 3 שורות. $27 - 6 = 21$ קוביות.

13. (א) שורה אחורית 3, 2, 2; שורה אמצעית 2, 2, 1; שורה קדמית 1, 1, 0. 14 ארגזים. (ב) מלפנים 3, 2, 2; מימין 1, 2, 3. (ג) $14 \cdot 0.125 = 1.75$ מ״ק. (ד) $18 - 14 = 4$ ארגזים.

© אור בן שטרית · אינסוף

14. (א) בשניהם 11 קוביות. (ב) לא: במבנה I ריקה המשבצת הימנית בשורה הקדמית, ובמבנה II ריקה המשבצת הימנית בשורה האמצעית. (ג) המבטים הם $1,2,2$ לעומת $1,2,3$. מוסיפים קובייה אחת על אחד המגדלים בגובה 2 שבשורה האחורית.

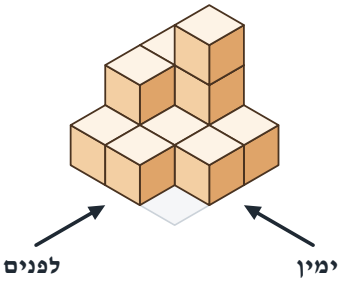
15. (א) לא נכון: מספר הקוביות אינו קובע את הצללית. (ב) נכון. (ג) נכון: המשבצת כבר תפוסה. (ד) לא נכון: קובייה שאינה משפיעה על שום מקסימום ואינה מרוקנת משבצת לא משנה אף מבט. (ה) נכון: המבטים מראים רק מקסימום, ולכן אפשר להוריד קוביות מוסתרות.

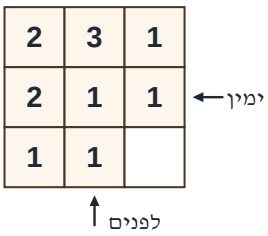
16. (א) $N=15$; מלפנים $2,3,2$; מימין $2,2,3$. (ב) כן, כי סדרת העמודות סימטרית. (ג) 2 קוביות, שתיהן מהטור האמצעי. (ד) $27-15=12$ קוביות.

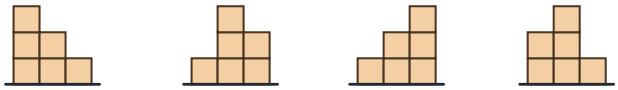
17. (א) $h=3$, ומספר הקוביות 15. (ב) $h=0$, $h=1$ או $h=2$. (ג) המבט מלמעלה: הוא מראה אם המשבצת תפוסה. בשני המבטים האחרים המקסימום אינו משתנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

14. דף סיכום







התרשים

- שורה תחתונה: לפנים. צד ימין: ימין.
- מספר בתא: גובה המגדל.
- N הוא סכום כל המספרים.
- נפח: $V = N \cdot a^3$.

המבטים

- **מלפנים:** מקסימום בכל טור, משמאל לימין.
- **מימין:** מקסימום בכל שורה, מהקדמית לאחורית.
- **מאחור:** היפוך של המבט מלפנים.
- **משמאל:** היפוך של המבט מימין.
- **מלמעלה:** המשבצות התפוסות בלבד.

ממבטים למבנה

- גובה מקסימלי בתא: הקטן מבין גבול הטור וגבול השורה.
- מינימום: קובייה בכל תא, ומגדל אחד שמשרת טור ושורה בעלי אותו גובה.

משימות שינוי

- **הוספה, מימין לא משתנה:** כל שורה עד המקסימום שלה.
- **הוספה, מלפנים לא משתנה:** כל טור עד המקסימום שלו.
- **הורדה, מלמעלה לא משתנה:** משאירים 1 בכל תא.
- **הורדה, מלפנים לא משתנה:** בכל טור נשאר רק המגדל הגבוה.
- **מלפנים = מאחור:** סדרת העמודות סימטרית.
- **השלמה לקובייה:** $n^3 - N$, כאשר n הוא הממד הגדול ביותר.

מתכון לשאלה בבחינה

1. כותבים תרשים מספרים וכיוונים.
2. מקיפים מקסימום בכל טור ובכל שורה.
3. מסרטטים את המבטים הנדרשים.
4. במשימת שינוי: כותבים תרשים חדש.
5. מחשבים הפרש בסכומים.
6. בודקים כל מבט לפני ואחרי.

© אור בן שטרית · אינסוף