אינסוף
מתמטיקה

אשכול התמצאות במישור ובמרחב · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35372

גופים במרחב: נפח ושטחים

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

מקרר, סיר, קונוס ואקווריום: בשאלה הזאת הגאומטרייה יוצאת לחיי היום־יום. **תלמיד** ילמד כאן להבין מאיפה באות הנוסחאות, לזהות מה מבקשים ולמצוא את המשולש ישר הזווית שבתוך הגוף. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2023–2026 ורצף הוראה. בסוף הקובץ תרגול מודרך, פתרונות עם טעות, תרגול עצמאי ומעורב, תשובות ורמזים.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. נפח, מעטפת או שטח פנים? **3**

3. מאיפה באות נוסחאות הנפח **3**

4. הגופים אחד אחד **5**

5. פיתגורס בתוך הגוף **6**

6. שאלה הפוכה והמרת יחידות **7**

7. שינוי ממדים: מה קורה לנפח ולשטח **8**

8. החלטות ועיגול **8**

9. טיפים וטריקים **8**

10. טעויות נפוצות **9**

11. למורה: רצף הוראה מוצע **10**

12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **11**

תרגיל 1: מכל מים: נפח, אחוזים ויחידות 11

תרגיל 2: פחיות וקרטון: גליל בתוך תיבה 12

תרגיל 3: משפך: חרוט, פיתגורס והשוואה לגליל 14

תרגיל 4: אוהל: פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע 15

תרגיל 5: פירמידה שבסיסה מלבן: שני גובהי פאה 17

תרגיל 6: פירמידה עם מקצוע מאונך לבסיס 18

תרגיל 7: שלושה כדורים בשפופרת 19

תרגיל 8: שינוי ממדים של פחית 20

תרגיל 9: ממגורה: גוף מורכב 22

תרגיל 10: איזו אריזה לבחור? שאלה מסכמת 23

13. תרגול נוסף **25**

14. תשובות ורמזים **29**

15. דף סיכום **30**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בשאלון 35372 מופיעה שאלה אחת בגופים במרחב, בפרק השני תחת הכותרת «אשכול התמצאות במישור ובמרחב». השאלה עוסקת תמיד בחפץ מוחשי, והסעיפים עוברים בדרך כלל בין חמישה מהלכים:

1. **חישוב ישיר:** נפח או שטח של גוף לפי הנתונים.
2. **פיתגורס בתוך הגוף:** קו יוצר של חרוט או גובה של פאה בפירמידה.
3. **אחוזים:** אחוז מהגובה, אחוז מילוי, דרישת תקן.
4. **שאלה הפוכה:** נתון נפח או שטח, ומחפשים רדיוס או גובה.
5. **החלטה:** האם הסיר נכנס, כמה מארזים אפשר להכין, איזה מסנן מתאים.

מועד	שאלה	החפץ והגופים	מה נשאל
קיץ 2023	4	מלחיות: תיבה ופירמידה	נפח, גובה פירמידה מתוך נפח, אחוז מילוי, משוואה למספר המלחיות
קיץ 2024 א	5	ממתקי שוקולד: פירמידה וחרוט	נפח, גובה פאה בפיתגורס, שטח פאה, כמה מארזים לכל היותר
קיץ 2024 ב	5	עוגה בתבנית: תיבה, קוביות וחרוטים	נפח, חיתוך לקוביות, שטח ציפוי, רדיוס מתוך היקף, נפח כולל
קיץ 2025 א	6	מקרר וסירים: תיבה וגלילים	נפח, אחוז מגובה, גובה מתוך נפח, גובה מתוך שטח מעטפת, החלטה
קיץ 2025 ב	6	מכונת כביסה: תיבה וגליל	שטח מעטפת, נפח, קריאה מטבלה, השפעת שינוי בגובה
קיץ 2026 א	6	קונוסים ועמוד: חרוט וגליל	קו יוצר, שטח מעטפת, רדיוס מתוך נפח, השוואת שטחים
קיץ 2026 ב	6	אקווריום ומסנן: תיבה וגליל	נפח, אחוז מנפח, החלטה לפי תקן, נפח מים אחרי הכנסת גוף

> **מה לומדים מהטבלה**
>
> התיבה והגליל הם הגופים הנפוצים ביותר, והחרוט והפירמידה מופיעים בחלק מהמועדים. בכל המועדים מופיעה שאלה הפוכה או החלטה. כדור ומנסרה לא הופיעו במועדים האלה, אבל הם בתוכנית הלימודים ובדף הנוסחאות, ולכן צריך להכיר אותם.

מה יש בדף הנוסחאות

הסימונים בדף הם: V נפח, M שטח מעטפת, F שטח פנים (כל הפאות), S שטח בסיס, R רדיוס, h גובה, ℓ קו יוצר.

© אור בן שטרית · אינסוף

הגוף	נפח V	שטח מעטפת M	שטח פנים F
תיבה (a, b, h)	$a \cdot b \cdot h$	$2(a+b) \cdot h$	$M + 2ab$
קובייה (a)	a^3	$4a^2$	$6a^2$
מנסרה ישרה	$S \cdot h$	$P \cdot h$ (P היקף הבסיס)	$M + 2S$
פירמידה	$\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$	סכום שטחי הפאות הצדדיות	$M + S$
גליל	$\pi R^2 h$	$2\pi R h$	$M + 2\pi R^2$
חרוט	$\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$	$\pi R \ell$	$M + \pi R^2$
כדור	$\frac{4}{3} \cdot \pi R^3$	אין	$4\pi R^2$

טיפ

אין צורך לשנן נוסחאות. מה שצריך לדעת הוא **איזו נוסחה מתאימה לשאלה** ו**איך מוצאים את המידה החסרה**. בשני הדברים האלה עוסקת החוברת.

2. נפח, מעטפת או שטח פנים?

בשאלה כתוב	מחשבים	היחידות
למלא, להכיל, כמה נכנס, כמות שוקולד, מים, בטון, מלח	**נפח** V	סמ״ק, מ״ק, ליטר
מדבקה סביב פחית, צביעת הקירות, הבד של אוהל בלי רצפה	**שטח מעטפת** M	סמ״ר, מ״ר
לעטוף מכל הצדדים, כמות חומר לאריזה סגורה	**שטח פנים** F	סמ״ר, מ״ר
כוס, אקווריום או מכל בלי מכסה	**מעטפת ובסיס אחד**: $M + S$	סמ״ר, מ״ר

אינטואיציה

נפח עונה על השאלה «כמה נכנס פנימה?». **שטח** עונה על השאלה «כמה צריך כדי לכסות מבחוץ?». דמיינו קופסת נעליים: הנפח הוא כמה נעליים נכנסות, והשטח הוא כמה נייר עטיפה צריך לה. המעטפת היא רק הקירות, בלי הרצפה והתקרה.

למורה

בתוכנית הלימודים קבוצת הדוגמאות הראשונה עוסקת רק במשמעות. כדאי להביא לכיתה חפצים אמיתיים (פחית, אריזת קרטון, כדור) ולשאול לגבי כל אחד: «מה יעניין את המפעל? מה יעניין את מעצב התווית?». כך התלמידים מקשרים בין המילה לבין החישוב לפני שמופיעה נוסחה.

3. מאיפה באות נוסחאות הנפח

גוף ישר: $V = S \cdot h$

בתיבה, במנסרה ובגליל כל חתך מקביל לבסיס זהה לבסיס. הגוף הוא ערימה של שכבות זהות, ולכן הנפח הוא שטח השכבה כפול הגובה.

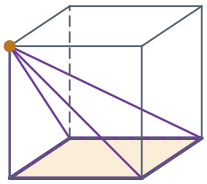
גוף מחודד: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

בפירמידה ובחרוט השכבות הולכות וקטנות עד קודקוד. הנפח הוא בדיוק שליש מנפח הגוף הישר בעל אותו בסיס ואותו גובה.

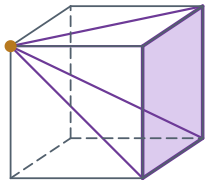
© אור בן שטרית · אינסוף

נימוק: למה שליש?

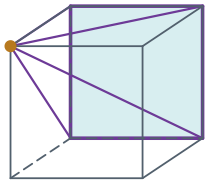
קובייה שצלעה a מתחלקת לשלוש פירמידות זהות: שלושתן חולקות אותו קודקוד (פינה של הקובייה), והבסיסים שלהן הם שלוש הפאות שאינן נוגעות בפינה הזאת. לכן נפח כל פירמידה הוא $a^2 \cdot a \div 3 = \frac{1}{3} \cdot a^3$, כלומר $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.



פירמידה 1



פירמידה 2

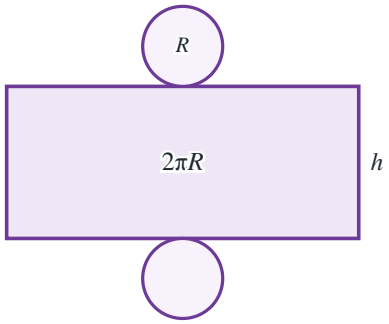


פירמידה 3

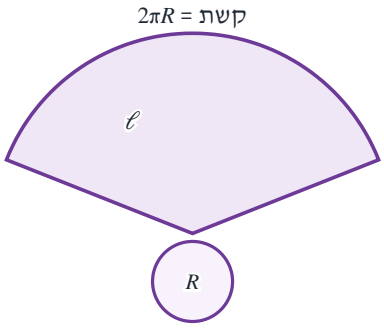
למורה: הדגמה שמשכנעת

מלאו חרוט מים או אורז ושפכו אותו לגליל בעל אותו בסיס ואותו גובה. אחרי שלושה מילויים בדיוק הגליל מלא. הניסוי לוקח שתי דקות, והתלמידים זוכרים את השליש שנים אחר כך.

מאיפה באות נוסחאות המעטפת



פריסת גליל: המעטפת היא מלבן



פריסת חרוט: המעטפת היא סקטור של עיגול

גליל: $M = 2\pi Rh$

חותכים את התווית של הפחית לאורך קו אנכי ופורשים. מתקבל מלבן: רוחבו היקף הבסיס $2\pi R$, וגובהו h.

חרוט: $M = \pi R\ell$

פורשים ומקבלים גזרה של מעגל שרדיוסו ℓ. הקשת שלה היא $2\pi R$, שהם $R \div \ell$ מהיקף המעגל השלם. לכן השטח הוא $(R \div \ell) \cdot \pi\ell^2 = \pi R\ell$.

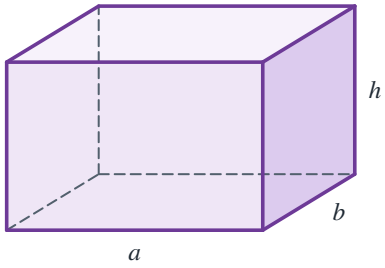
כדור

אינטואיציה: ארכימדס והגליל

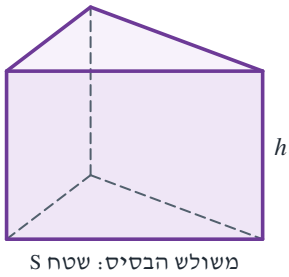
נכניס כדור לתוך גליל שרדיוסו R וגובהו $2R$. נפח הגליל הוא $2\pi R^3$, ונפח הכדור הוא בדיוק שני שלישים ממנו: $\frac{4}{3}\pi R^3$. גם שטח הפנים של הכדור, $4\pi R^2$, שווה בדיוק לשטח המעטפת של אותו גליל: $2\pi R \cdot 2R$. ארכימדס ראה בזה את התגלית היפה ביותר שלו.

© אור בן שטרית · אינסוף

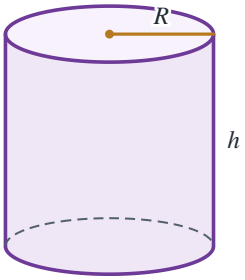
4. הגופים אחד אחד



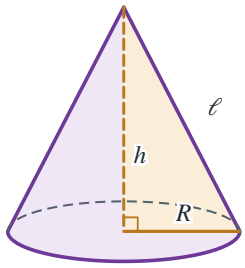
תיבה



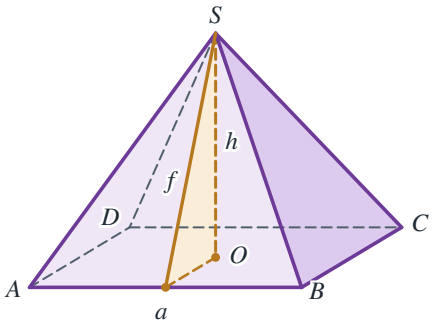
מנסרה משולשת ישרה



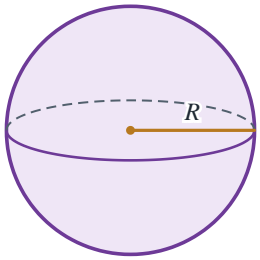
גליל



חרוט



פירמידה ישרה, בסיס ריבועי



כדור

תיבה וקוביה

- **מעטפת:** ארבע הפאות הצדדיות, כלומר היקף הבסיס כפול הגובה: $M = 2(a+b)h$.
- **אלכסון הבסיס:** $d = \sqrt{(a^2+b^2)}$. **אלכסון הגוף:** $\sqrt{(a^2+b^2+h^2)}$.
- **קוביה:** כל הצלעות שוות, ולכן $V = a^3$, $F = 6a^2$.

מנסרה ישרה שבסיסה משולש

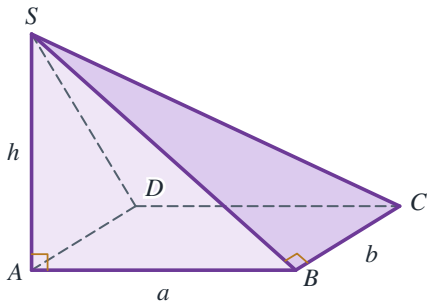
- שתי פאות משולשות זהות (הבסיסים) ושלוש פאות מלבניות (המעטפת).
- $V = S \cdot h$, כאשר S הוא שטח המשולש ו־h הוא אורך המנסרה.
- שימו לב: «גובה המשולש» ו«גובה המנסרה» הם שני דברים שונים.

פירמידה ישרה

בפירמידה ישרה קודקוד הפירמידה נמצא בדיוק מעל מרכז הבסיס (נקודה O בסרטוט).

- **בסיס ריבוע או מלבן:** O היא נקודת החיתוך של האלכסונים.
- **בסיס משולש שווה צלעות:** O היא מרכז המשולש. השטח הוא $S = a^2\sqrt{3} \div 4$.
- **מעטפת:** אין נוסחה אחת. מחברים את שטחי הפאות: כל פאה היא משולש שבסיסו צלע הבסיס וגובהו **גובה הפאה**.

© אור בן שטרית · אינסוף



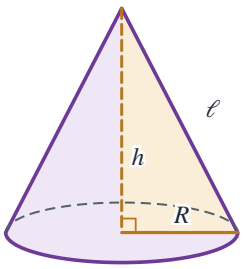
פירמידה לא ישרה: המקצוע SA מאונך לבסיס

פירמידה לא ישרה שמקצוע צדדי שלה מאונך לבסיס

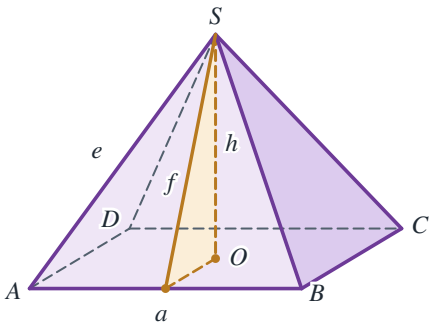
- הגובה של הפירמידה הוא המקצוע המאונך: $h = SA$.
- הנוסחה לנפח לא משתנה: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.
- שתי הפאות שנוגעות במקצוע המאונך (SAB ו־SAD) הן משולשים ישרי זווית ב־A.
- בבסיס מלבני גם הפאות SBC ו־SDC הן משולשים ישרי זווית, ב־B וב־D. הסיבה: BC מאונכת ל־AB וגם ל־SA, ולכן היא מאונכת למישור SAB, וגם ל־SB שבתוכו.

5. פיתגורס בתוך הגוף

כמעט כל מידה חסרה מתקבלת ממשולש ישר זווית שעומד על הגובה. הסוד הוא לראות אותו:



חרוט: h, R ו־ℓ



פירמידה: המשולש SOF

הגוף	המשולש	הנוסחה
חרוט	גובה, רדיוס, קו יוצר	$\ell^2 = h^2 + R^2$
פירמידה בסיס ריבוע: גובה פאה f	SO, OF (חצי צלע), SF	$f^2 = h^2 + (a \div 2)^2$
פירמידה בסיס ריבוע: מקצוע צדדי e	SO, OA (חצי אלכסון), SA	$e^2 = h^2 + (d \div 2)^2$
פירמידה בסיס מלבן	שני גובהי פאה שונים	$f_1^2 = h^2 + (b \div 2)^2$, $f_2^2 = h^2 + (a \div 2)^2$

טעות נפוצה

מתבלבלים בין **גובה הפירמידה** (SO, מאונך לבסיס, בתוך הגוף) לבין **גובה הפאה** (SF, על הפאה מבחוץ). נפח מחושב עם SO, ושטח פאה מחושב עם SF. אותו דבר בחרוט: נפח עם h, מעטפת עם ℓ.

© אור בן שטרית · אינסוף

טריק: שלשות פיתגוריות

שאלות בגרות נבנות לעיתים קרובות על שלשות פיתגוריות: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 8, 15, 17; 9, 12, 15 וכפולות שלהן. למשל, ברדיוס 21 ובגובה 72 מזהים $3 \cdot (7, 24, 25)$, ולכן הקו היוצר הוא 75.

6. שאלה הפוכה והמרת יחידות

בשאלה הפוכה נתון הגודל, ומחפשים את אחד הממדים. מציבים בנוסחה ופותרים משוואה. לעיתים קרובות π מופיע בשני האגפים ומתבטל.

נתון	מחפשים	הדרך	דוגמה
V של גליל ו־R	h	$h = V \div (\pi R^2)$	$R = 10$, $V = 1{,}400\pi$: $h = 14$
V של גליל ו־h	R	$R^2 = V \div (\pi h)$, ואז שורש	$h = 216$, $V = 3{,}456\pi$: $R^2 = 16$, $R = 4$
M של גליל ו־R	h	$h = M \div (2\pi R)$	$R = 12$, $M = 672\pi$: $h = 28$
היקף הבסיס	R	$R = P \div (2\pi)$	$P = 3\pi$: $R = 1.5$
V של פירמידה ו־S	h	$h = 3V \div S$	$V = 64$, $S = 16$: $h = 12$
תיבה שבסיסה $a \times a$, שטח נתון	a	משוואה ריבועית	$a^2 + 120a = 6{,}400$: $a = 40$

טיפ: עבודה עם π

כותבים את התוצאה עם π כל עוד אפשר: 648π מדויק יותר מ־2,035.75. בהשוואה בין שני גופים מחלקים ב־π ומשווים מספרים פשוטים. בתשובה הסופית אפשר להציב בעזרת המחשבון ולעגל לשתי ספרות, אלא אם נאמר אחרת.

המרת יחידות

אורך	שטח	נפח	קיבולת
1 מ׳ = 100 ס״מ	1 מ״ר = 10,000 סמ״ר	1 מ״ק = 1,000,000 סמ״ק	1 ליטר = 1,000 סמ״ק
1 ס״מ = 10 מ״מ	1 סמ״ר = 100 ממ״ר	1 סמ״ק = 1,000 ממ״ק	1 מ״ק = 1,000 ליטר

נימוק: למה לא פשוט 100?

מטר רבוע הוא ריבוע של 100 ס״מ על 100 ס״מ, ולכן יש בו $100 \cdot 100 = 10{,}000$ סמ״ר. מטר מעוקב הוא $100 \cdot 100 \cdot 100$ קוביות של סנטימטר. יחס ההמרה של אורך מופיע בשטח בריבוע, ובנפח בחזקה שלישית.

טיפ: ממירים לפני שמחשבים

הכי בטוח להעביר את כל האורכים ליחידה אחת **לפני** הכפל. תיבה של 1.2 מ׳ על 80 ס״מ על 60 ס״מ: כותבים 120, 80, 60 ומחשבים בסמ״ק, ואז מחלקים ב־1,000 כדי לעבור לליטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

7. שינוי ממדים: מה קורה לנפח ולשטח

השינוי בגליל ($V = \pi R^2 h$, $M = 2\pi Rh$)	הנפח גדל פי	המעטפת גדלה פי
הגובה גדל פי k	k	k
הרדיוס גדל פי k	k^2	k
כל הממדים גדלים פי k	k^3	k^2

אינטואיציה

חשבו על הכפלה של כל הממדים פי 2. הנפח גדל פי 8: שמונה קופסאות קטנות נכנסות בקופסה הגדולה. השטח גדל פי 4 בלבד: אותה צורה, וכל פאה גדלה פי 4. זו גם הסיבה שקוביות קרח קטנות נמסות מהר יותר: יש להן הרבה שטח ביחס לנפח.

שינוי באחוזים הוא שינוי «פי»: גדל ב־20% פירושו מוכפל ב־1.2, וקטן ב־10% פירושו מוכפל ב־0.9.

- רדיוס גדל ב־20%: הנפח גדל פי $1.2^2 = 1.44$, כלומר ב־44%.
- בכיוון ההפוך: נפח גדל ב־44% והגובה קבוע. אז $k^2 = 1.44$, ולכן $k = 1.2$, כלומר הרדיוס גדל ב־20%.

טעות נפוצה

מניחים שאם הרדיוס גדל ב־20% גם הנפח גדל ב־20%. בנוסחה יש R^2, ולכן השינוי ברדיוס נכנס בריבוע.

8. החלטות ועיגול

סוג השאלה	איך מעגלים	דוגמה
כמה אפשר להכין, «לכל היותר»	כלפי מטה: לא מסיימים מארז שאין לו חומר	$170 \div 55.7 \approx 3.05$: 3 מארזים
כמה צריך, «לפחות»	כלפי מעלה: חצי פחית לא נמכרת	$29.45 \div 5 \approx 5.89$: 6 פחיות
האם נכנס?	משווים את הממד בלי עיגול מקל	סיר בגובה 28 ומדף בגובה 27: לא נכנס
עומד בתקן?	מחשבים את הדרישה ומשווים	2% מ־72,000 הם 1,440, ו־1,500 עומד בדרישה

נפח של מים סביב גוף

אם מכניסים גוף למכל ומבקשים את כמות המים הגדולה ביותר, מחסירים: V של המכל פחות V של הגוף. אם הגוף שקוע במלואו, גובה המים עולה בשיעור $V \div S$, כאשר S הוא שטח בסיס המכל.

9. טיפים וטריקים

1. **מסמנים על הסרטוט** את כל הנתונים. מה שלא נתון, מסמנים באות.
2. **קוטר או רדיוס:** בודקים פעמיים. כדאי לכתוב $R =$ מיד בתחילת הפתרון.
3. **כותבים את הנוסחה, אחר כך מציבים:** גם אם יש טעות בחישוב, הנוסחה מזכה בנקודות.
4. **מחלקים ב־π מוקדם:** בשאלה הפוכה ובהשוואה π בדרך כלל מתבטל.

© אור בן שטרית · אינסוף

5. **בודקים סבירות:** פחית של 600 סמ״ק היא חצי ליטר ומעט; נשמע הגיוני. פחית של 60 ליטר אינה הגיונית.
6. **שלשות פיתגוריות:** מזהים אותן לפני שמוציאים מחשבון.
7. **«ללא מכסה» או «ללא רצפה»:** מחסירים את הפאה החסרה. בחדר לצביעה, גם את החלונות והדלתות, אם נאמר.
8. **גוף מורכב:** מחשבים כל חלק לבד. בשטח לא סופרים פאות פנימיות שאינן נראות.
9. **אותה יחידה בכל החישוב:** בודקים לפני הכפל שכל הממדים באותה יחידה.
10. **«בכמה» ו«פי כמה»:** בכמה גדל: הפרש. פי כמה גדל: מנה. בכמה אחוזים גדל: הפרש חלקי הערך המקורי, כפול 100.

10. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
מציבים קוטר במקום רדיוס	בשאלה נתון קוטר	מחלקים ב־2 כבר בשורה הראשונה
נפח פירמידה בלי ⅓	מערבבים עם גוף ישר	גוף מחודד: תמיד שליש
משתמשים בקו יוצר בנפח, או בגובה במעטפת	שתי המידות נראות דומות	נפח עם h, מעטפת חרוט עם ℓ
גובה הפאה נחשב עם חצי אלכסון	מערבבים בין שני משולשים	גובה פאה: חצי צלע. מקצוע צדדי: חצי אלכסון
1 מ״ק = 100 סמ״ק	ממירים כמו באורך	$100^3 = 1{,}000{,}000$
שוכחים את הבסיס בשטח פנים, או מוסיפים בסיס בכוס פתוחה	לא קוראים את ההקשר	שואלים: אילו פאות באמת קיימות?
מעגלים באמצע החישוב	נוח להקליד מספר קצר	מחזיקים π או את התוצאה המלאה, ומעגלים בסוף
אחוז גדילה: מחלקים בערך החדש	מתבלבלים בבסיס האחוז	תמיד מחלקים בערך **המקורי**

11. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים מקצה ליחידת הגאומטרייה במרחב 20 שעות, וקבוצות הדוגמאות בה מתקדמות ממשמעות, דרך חישוב ושינוי ממדים, אל שיקולי כדאיות.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
משמעות	2	נפח, מעטפת ושטח פנים בחפצים מוכרים	«מה חשוב למי שמייצר פחית, ומה חשוב למי שמדפיס תווית?»
גופים ישרים	4	תיבה, מנסרה, גליל, פריסה	«מה קורה לתווית כשפורשים אותה?»
גופים מחודדים וכדור	5	פירמידה, חרוט, כדור, פיתגורס בגוף	«היכן בפירמידה מסתתר משולש ישר זווית?»
שאלות הפוכות ויחידות	3	מציאת ממד, פתרון משוואה, המרת יחידות	«כמה ליטרים נכנסים במטר מעוקב?»
שינוי ממדים	3	אחוזים, «פי», שינוי בממד אחד או בכולם	«אם הרדיוס גדל פי 2, האם הנפח גדל פי 2?»
כדאיות ושילוב	3	השוואת חלופות, עלויות, שאלות בגרות	«איזו אריזה הייתם בוחרים, ועל פי איזה קריטריון?»

למורה: קריאה חשובה לפני פתרון

בקשו מהתלמידים לכתוב ליד כל סעיף רק אחת משלוש מילים: «נפח», «מעטפת» או «שטח פנים», בלי לחשב. התרגול הקצר הזה חושף את רוב הטעויות שמקורן בקריאה ולא בחישוב.

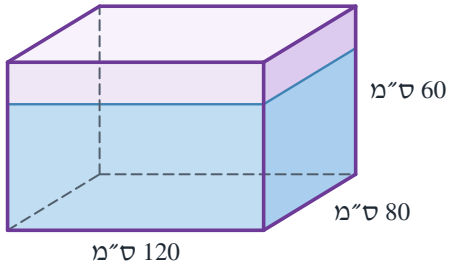
© אור בן שטרית · אינסוף

12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. בחישובים השתמשנו בערך של π במחשבון, ועיגלנו בסוף לשתי ספרות. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 מכל מים: נפח, אחוזים ויחידות

מכל מים הוא בצורת תיבה, פתוח מלמעלה. אורכו 1.2 מטרים, רוחבו 80 ס״מ וגובהו 60 ס״מ.



מכל מים מלא ב־75%

א. מצאו את נפח המכל בליטרים.

ב. המים ממלאים 75% מנפח המכל. כמה ליטרים של מים יש במכל, ומהו גובה המים?

ג. צובעים מבחוץ את ארבע הדפנות ואת הבסיס של המכל. מצאו את השטח לצביעה במטרים רבועים.

ד. עלות הצביעה היא 25 שקלים למטר רבוע. מהי עלות הצביעה?

ה. מכל אחר, גם הוא פתוח מלמעלה, הוא תיבה שבסיסה ריבוע וגובהה 30 ס״מ. שטח ארבע הדפנות והבסיס יחד הוא 6,400 סמ״ר. מצאו את אורך צלע הבסיס.

מה מתרגלים: המרת יחידות, נפח תיבה, אחוז מילוי, גוף פתוח, שאלה הפוכה עם משוואה ריבועית

פתרון מלא

סעיף א

ממירים הכול לסנטימטרים: האורך 120 ס״מ.

$$V = 120 \cdot 80 \cdot 60 = 576{,}000 \text{ סמ״ק}$$

ליטר הוא 1,000 סמ״ק: $576{,}000 \div 1{,}000 = 576$.

תשובה: 576 ליטרים.

סעיף ב

כמות המים: $0.75 \cdot 576 = 432$ ליטרים. שטח הבסיס לא משתנה, ולכן גם הגובה הוא 75% מגובה המכל: $0.75 \cdot 60 = 45$.

תשובה: 432 ליטרים, בגובה 45 ס״מ.

סעיף ג

$$S = 120 \cdot 80 = 9{,}600 \qquad M = 2(120 + 80) \cdot 60 = 24{,}000$$

יחד $9{,}600 + 24{,}000 = 33{,}600$ סמ״ר. מטר רבוע הוא 10,000 סמ״ר:

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: 3.36 מטרים רבועים.

סעיף ד

$$3.36 \cdot 25 = 84$$

תשובה: 84 שקלים.

סעיף ה

נסמן ב־a את צלע הבסיס. הבסיס הוא a^2, וארבע הדפנות יחד הן $4 \cdot a \cdot 30 = 120a$:

$$a^2 + 120a = 6{,}400$$

$$a^2 + 120a - 6{,}400 = 0$$

$$a = \frac{-120 \pm \sqrt{(14{,}400 + 25{,}600)}}{2} = \frac{-120 \pm 200}{2}$$

מקבלים $a = 40$ או $a = -160$. אורך חיובי, ולכן הפתרון השלילי נפסל. בדיקה: $1{,}600 + 4{,}800 = 6{,}400$.

תשובה: 40 ס״מ.

תרגיל 2 פחיות וקרטון: גליל בתוך תיבה

פחית שימורים היא בצורת גליל שרדיוסו 4 ס״מ וגובהו 12 ס״מ.

א. מצאו את נפח הפחית.

ב. מסביב לפחית מדביקים תווית שמכסה בדיוק את המעטפת. מצאו את שטח התווית.

ג. מצאו את כמות הפח הדרושה לפחית סגורה (שטח הפנים).

ד. שש פחיות נארזות בשורה כפולה (2 על 3) בקרטון בצורת תיבה, כך שהן נוגעות זו בזו ובדפנות. גובה הקרטון שווה לגובה הפחית. מצאו את נפח הקרטון.

ה. איזה אחוז מנפח הקרטון לא מנוצל? האם התשובה הייתה משתנה אם הרדיוס היה שונה? נמקו.

מה מתרגלים: גליל: נפח, מעטפת ושטח פנים; קשר בין קוטר לממדי אריזה; יחס שאינו תלוי בממדים

פתרון מלא

סעיף א

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 16 \cdot 12 = 192\pi \approx 603.19$$

תשובה: $192\pi \approx 603.19$ סמ״ק.

סעיף ב

$$M = 2\pi R h = 2\pi \cdot 4 \cdot 12 = 96\pi \approx 301.59$$

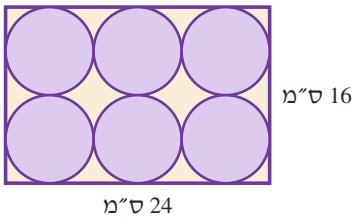
תשובה: $96\pi \approx 301.59$ סמ״ר.

סעיף ג

$$F = M + 2\pi R^2 = 96\pi + 32\pi = 128\pi \approx 402.12$$

תשובה: $128\pi \approx 402.12$ סמ״ר.

סעיף ד



שש פחיות בקרטון, מבט מלמעלה

קוטר הפחית 8 ס״מ. לאורך 3 פחיות: 24 ס״מ. לרוחב 2 פחיות: 16 ס״מ.

$$V = 24 \cdot 16 \cdot 12 = 4{,}608$$

תשובה: 4,608 סמ״ק.

סעיף ה

נפח שש הפחיות הוא $6 \cdot 192\pi = 1{,}152\pi$. החלק המנוצל מהקרטון:

$$\frac{1{,}152\pi}{4{,}608} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

לכן כ־78.54% מנוצלים, ו־21.46% לא מנוצלים.

אינטואיציה

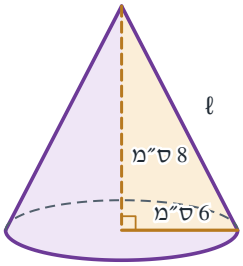
התוצאה $\pi \div 4$ לא תלויה ברדיוס ובגובה. למעשה זה היחס בין שטח עיגול לשטח הריבוע החוסם אותו: $\pi R^2 \div (2R)^2 = \pi \div 4$. כל אריזה כזאת מבזבזת בערך חמישית מהנפח.

תשובה: כ־21.46%. התשובה לא הייתה משתנה, כי היחס הוא $\pi \div 4$ בכל רדיוס.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 3 משפך: חרוט, פיתגורס והשוואה לגליל

משפך הוא בצורת חרוט, רדיוס הבסיס שלו 6 ס״מ וגובהו 8 ס״מ.



משפך

א. מצאו את הקו היוצר של המשפך.

ב. מצאו את נפח המשפך.

ג. מצאו את שטח המעטפת של המשפך.

ד. המשפך מלא נוזל, והנוזל זורם ממנו בקצב של 12 סמ״ק בשנייה. בתוך כמה זמן יתרוקן המשפך?

ה. בכמה משפכים מלאים אפשר למלא גליל שרדיוסו 6 ס״מ וגובהו 8 ס״מ? נמקו.

ו. למשפך אחר אותו רדיוס, ונפחו 120π סמ״ק. מצאו את גובהו.

מה מתרגלים: קו יוצר, נפח, מעטפת, יחס חרוט לגליל, שאלה הפוכה עם ביטול π

פתרון מלא

סעיף א

במשולש שבין הגובה לרדיוס: $\ell^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. אלה $2 \cdot (3, 4, 5)$.

תשובה: $\ell = 10$ ס״מ.

סעיף ב

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \approx 301.59$$

תשובה: $96\pi \approx 301.59$ סמ״ק.

סעיף ג

$$M = \pi R \ell = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \approx 188.50$$

תשובה: $60\pi \approx 188.50$ סמ״ר.

סעיף ד

$$t = \frac{301.59}{12} \approx 25.13$$

תשובה: כ־25 שניות.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

נפח הגליל הוא $\pi \cdot 36 \cdot 8 = 288\pi$, ו־$96\pi \div 288\pi = 3$. זו בדיוק התכונה של גופים מחודדים: באותו בסיס ובאותו גובה הנפח הוא שליש.

תשובה: 3 משפכים.

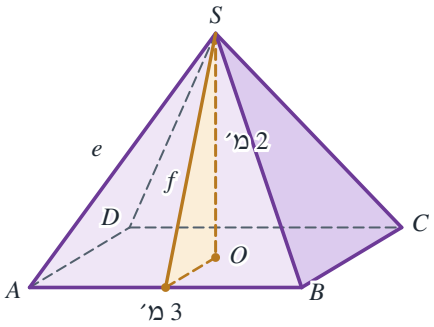
סעיף ו

$$120\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 36 \cdot h$$
$$120 = 12h$$
$$h = 10$$

תשובה: 10 ס״מ.

תרגיל 4 אוהל: פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע

אוהל הוא בצורת פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע. אורך צלע הבסיס 3 מטרים, וגובה האוהל (המוט המרכזי) 2 מטרים.



אוהל

א. מצאו את גובה הפאה הצדדית של האוהל.

ב. כמה בד דרוש לארבע הפאות הצדדיות?

ג. קונים 10% בד יותר מהנדרש. מחיר הבד 40 שקלים למטר רבוע. מהי העלות?

ד. מצאו את נפח האוויר באוהל.

ה. שלד האוהל בנוי ממוטות: 4 מוטות בבסיס, 4 מוטות צדדיים ומוט מרכזי אחד. מצאו את האורך הכולל של המוטות.

מה מתרגלים: גובה פאה מול מקצוע צדדי, שטח מעטפת כסכום פאות, אחוזים ועלות, נפח

פתרון מלא

סעיף א

במשולש SOF: OF היא חצי צלע, כלומר 1.5 מטרים:

$$f = \sqrt{(2^2 + 1.5^2)} = \sqrt{6.25} = 2.5$$

תשובה: 2.5 מטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ב

כל פאה היא משולש: בסיס 3 וגובה 2.5:

$$M = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2.5}{2} = 15$$

תשובה: 15 מטרים רבועים.

סעיף ג

$$1.1 \cdot 15 = 16.5 \qquad 16.5 \cdot 40 = 660$$

תשובה: 660 שקלים.

סעיף ד

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2 = 6$$

תשובה: 6 מטרים מעוקבים.

סעיף ה

אלכסון הבסיס: $\sqrt{18} = \sqrt{(3^2 + 3^2)}$, d, וחציו $\sqrt{18} \div 2$. המוט הצדדי הוא היתר במשולש SOA:

$$e = \sqrt{(2^2 + \frac{18}{4})} = \sqrt{8.5} \approx 2.92$$

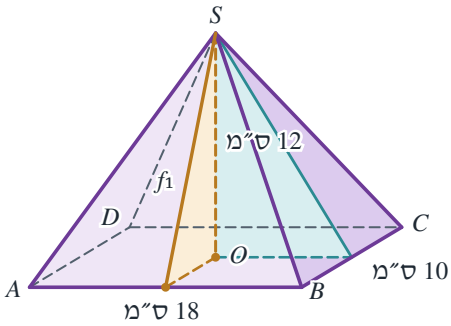
אורך כולל: $4 \cdot 3 + 4 \cdot \sqrt{8.5} + 2 \approx 12 + 11.66 + 2 = 25.66$.

תשובה: כ־25.66 מטרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 5 פירמידה שבסיסה מלבן: שני גובהי פאה

אריזה היא בצורת פירמידה ישרה שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם 18 ס״מ ו־10 ס״מ, וגובה הפירמידה 12 ס״מ.



בסיס מלבני: שני גובהי פאה שונים

א. מצאו את נפח האריזה.

ב. מצאו את גובה הפאה שבסיסה הצלע 18 ס״מ ואת גובה הפאה שבסיסה הצלע 10 ס״מ.

ג. מצאו את שטח המעטפת של האריזה.

ד. מצאו את שטח הפנים של האריזה.

ה. מצאו את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

מה מתרגלים: שני גובהי פאה, פיתגורס בחצי צלע ובחצי אלכסון, מעטפת ושטח פנים

פתרון מלא

סעיף א

$$V=\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 10\cdot 12=720$$

תשובה: 720 סמ״ק.

סעיף ב

כל פאה קשורה לחצי של **הצלע השנייה**: מהמרכז O עד אמצע הצלע 18 המרחק הוא חצי מ־10, ועד אמצע הצלע 10 המרחק הוא חצי מ־18.

$$f_1=\sqrt{(12^2+5^2)}=\sqrt{169}=13$$
$$f_2=\sqrt{(12^2+9^2)}=\sqrt{225}=15$$

תשובה: גובה הפאה שבסיסה 18 ס״מ הוא 13 ס״מ, וגובה הפאה שבסיסה 10 ס״מ הוא 15 ס״מ.

סעיף ג

יש שני זוגות של פאות זהות:

$$M=2\cdot\frac{18\cdot 13}{2}+2\cdot\frac{10\cdot 15}{2}=234+150=384$$

תשובה: 384 סמ״ר.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

$$F = M + S = 384 + 18 \cdot 10 = 564$$

תשובה: 564 סמ״ר.

סעיף ה

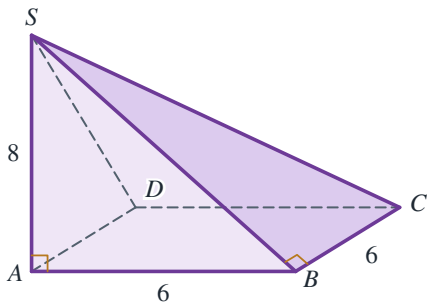
המקצוע הוא יתר של משולש שניצביו הגובה וחצי אלכסון הבסיס. חצי האלכסון בריבוע הוא $9^2 + 5^2 = 106$:

$$e = \sqrt{(12^2 + 9^2 + 5^2)} = \sqrt{250} \approx 15.81$$

תשובה: כ־15.81 ס״מ.

תרגיל 6 פירמידה עם מקצוע מאונך לבסיס

בסיס הפירמידה SABCD הוא ריבוע שצלעו 6 ס״מ. המקצוע SA מאונך לבסיס, ואורכו 8 ס״מ.



SA מאונך לבסיס

א. מצאו את נפח הפירמידה.

ב. מצאו את אורך המקצועות SB ו־SD.

ג. הסבירו מדוע המשולש SBC הוא ישר זווית ב־B.

ד. מצאו את שטח המעטפת ואת שטח הפנים של הפירמידה.

ה. מצאו את אורך המקצוע SC.

מה מתרגלים: פירמידה לא ישרה: גובה, פאות ישרות זווית, נימוק גאומטרי, שטח מעטפת

פתרון מלא

סעיף א

המקצוע המאונך הוא הגובה, ולכן:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 = 96$$

תשובה: 96 סמ״ק.

סעיף ב

במשולשים ישרי הזווית SAB ו־SAD:

$$SB = SD = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = \sqrt{100} = 10$$

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: 10 ס״מ.

סעיף ג

הצלע BC מאונכת ל־AB, כי הבסיס ריבוע. היא מאונכת גם ל־SA, כי SA מאונך לכל ישר שבבסיס. ישר שמאונך לשני ישרים נחתכים במישור מאונך למישור כולו, ולכן BC מאונכת גם ל־SB.

תשובה: לכן הזווית SBC היא זווית ישרה.

סעיף ד

שתי פאות עם ניצבים 6 ו־8, ושתי פאות עם ניצבים 6 ו־10:

$$M = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 10}{2} = 48 + 60 = 108$$

$$F = 108 + 36 = 144$$

תשובה: שטח המעטפת 108 סמ״ר, ושטח הפנים 144 סמ״ר.

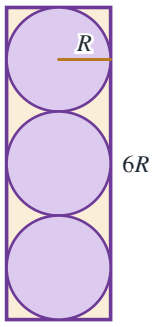
סעיף ה

במשולש SBC: $SC = \sqrt{(10^2 + 6^2)} = \sqrt{136} \approx 11.66$.

תשובה: כ־11.66 ס״מ.

תרגיל 7 שלושה כדורים בשפופרת

בשפופרת בצורת גליל נמצאים שלושה כדורי טניס זהים, זה על גבי זה. הכדורים נוגעים זה בזה, בדפנות, בבסיס ובמכסה. רדיוס כל כדור 3.3 ס״מ.



שלושה כדורים בשפופרת

א. מצאו את גובה השפופרת ואת נפחה.

ב. מצאו את נפח שלושת הכדורים יחד.

ג. הראו כי נפח הכדורים הוא שני שלישים מנפח השפופרת, בלי קשר לרדיוס.

ד. מצאו את נפח האוויר בשפופרת.

ה. מצאו את שטח הפנים של כדור אחד.

ו. מה גדול יותר: גובה השפופרת או היקף הבסיס שלה? נמקו.

מה מתרגלים: כדור וגליל, ביטוי כללי בעזרת R, יחס ⅔, השוואה בעזרת π

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

שלושה כדורים הם שישה רדיוסים: $h = 6 \cdot 3.3 = 19.8$.

$$V = \pi \cdot 3.3^2 \cdot 19.8 = 215.622\pi \approx 677.40$$

תשובה: הגובה 19.8 ס״מ, והנפח כ־677.40 סמ״ק.

סעיף ב

$$3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3.3^3 = 4\pi \cdot 35.937 = 143.748\pi \approx 451.60$$

תשובה: כ־451.60 סמ״ק.

סעיף ג

$$\frac{3 \cdot (4 \div 3) \cdot \pi R^3}{\pi R^2 \cdot 6R} = \frac{4\pi R^3}{6\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

תשובה: היחס הוא ⅔ בכל רדיוס, כי πR^3 מתבטל.

סעיף ד

האוויר הוא שליש מהנפח: $677.40 \div 3$.

תשובה: כ־225.80 סמ״ק.

סעיף ה

$$F = 4\pi \cdot 3.3^2 = 43.56\pi \approx 136.85$$

תשובה: כ־136.85 סמ״ר.

סעיף ו

בלי מחשבון: הגובה הוא $6R$, וההיקף הוא $2\pi R$. מכיוון ש־$\pi > 3$, מתקיים $2\pi R > 6R$. בקירוב: $19.8 < 20.73$.

תשובה: היקף הבסיס גדול מהגובה, אף שהעין נוטה לחשוב אחרת.

תרגיל 8 שינוי ממדים של פחית

פחית היא בצורת גליל שרדיוסו 5 ס״מ וגובהו 12 ס״מ.

א. מצאו את נפח הפחית.

ב. מגדילים את הרדיוס ב־1 ס״מ, ומשאירים את הגובה. בכמה אחוזים גדל הנפח?

ג. בפחית המקורית מגדילים את הרדיוס ב־25%, ומקטינים את הגובה ב־20%.
(1) בכמה אחוזים משתנה הנפח?
(2) בכמה אחוזים משתנה שטח המעטפת?

ד. בפחית אחרת הרדיוס הוגדל ב־0.5 ס״מ בלי שינוי בגובה, והנפח גדל ב־44%. מצאו את הרדיוס המקורי ואת הרדיוס החדש.

ה. פי כמה גדלים הנפח ושטח הפנים של פחית, אם מכפילים את כל הממדים פי 2?

מה מתרגלים: אחוזים כהכפלה, שינוי בשני ממדים, שאלה הפוכה מאחוז גדילה, קנה מידה

פתרון מלא

סעיף א

$$V = \pi \cdot 25 \cdot 12 = 300\pi$$

תשובה: $300\pi \approx 942.48$ סמ״ק.

סעיף ב

הרדיוס החדש: $V = \pi \cdot 36 \cdot 12 = 432\pi$.

$$\frac{432\pi - 300\pi}{300\pi} = \frac{132}{300} = 0.44$$

הרדיוס גדל פי 1.2, ולכן הנפח גדל פי $1.2^2 = 1.44$.

תשובה: ב־44%.

סעיף ג

(1) הרדיוס מוכפל ב־1.25, והגובה מוכפל ב־0.8. הנפח תלוי ב־R^2h:

$$1.25^2 \cdot 0.8 = 1.5625 \cdot 0.8 = 1.25$$

(2) המעטפת תלויה ב־Rh:

$$1.25 \cdot 0.8 = 1$$

תשובה: (1) הנפח גדל ב־25%. (2) המעטפת לא משתנה.

סעיף ד

הגובה קבוע, ולכן $k^2 = 1.44$, כלומר הרדיוס גדל פי 1.2:

$$\begin{aligned} 1.2R &= R + 0.5 \\ 0.2R &= 0.5 \\ R &= 2.5 \end{aligned}$$

תשובה: הרדיוס המקורי 2.5 ס״מ, והחדש 3 ס״מ.

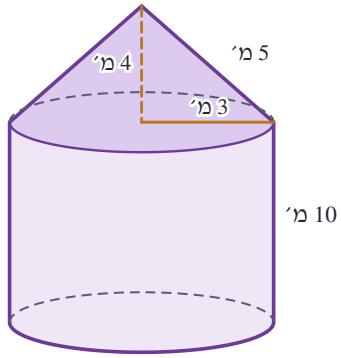
סעיף ה

תשובה: הנפח גדל פי $2^3 = 8$, ושטח הפנים פי $2^2 = 4$.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 9 ממגורה: גוף מורכב

ממגורה לאחסון חיטה בנויה מגליל שעליו חרוט. הרדיוס של שניהם 3 מטרים, גובה הגליל 10 מטרים, וגובה החרוט 4 מטרים.



ממגורה: גליל ועליו חרוט

א. מצאו את נפח הממגורה.

ב. צובעים מבחוץ את המעטפת של הגליל ואת המעטפת של החרוט. מצאו את השטח לצביעה.

ג. ליטר צבע מספיק ל־8 מטרים רבועים. הצבע נמכר בפחיות של 5 ליטרים. כמה פחיות לפחות צריך לקנות?

ד. ממלאים 80% מנפח הממגורה בחיטה. משקל מטר מעוקב של חיטה הוא 0.7 טון. כמה משאיות של 12 טון לפחות דרושות כדי לפנות את כל החיטה?

מה מתרגלים: גוף מורכב, פאות פנימיות שאינן נצבעות, עיגול כלפי מעלה, שרשרת חישובים

פתרון מלא

סעיף א

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 90\pi + 12\pi = 102\pi \approx 320.44$$

תשובה: $102\pi \approx 320.44$ מטרים מעוקבים.

סעיף ב

הקו היוצר של החרוט: $\ell = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$. הבסיס המשותף נמצא בתוך הממגורה ולא נצבע.

$$2\pi \cdot 3 \cdot 10 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 60\pi + 15\pi = 75\pi \approx 235.62$$

תשובה: $75\pi \approx 235.62$ מטרים רבועים.

סעיף ג

$$\frac{235.62}{8} \approx 29.45 \qquad \frac{29.45}{5} \approx 5.89$$

«לפחות» ו«פחיות שלמות» פירושם עיגול כלפי מעלה.

תשובה: 6 פחיות.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

$$\frac{179.45}{12} \approx 14.95 \qquad 256.35 \cdot 0.7 \approx 179.45 \qquad 0.8 \cdot 102\pi = 81.6\pi \approx 256.35$$

תשובה: 15 משאיות.

תרגיל 10 איזו אריזה לבחור? שאלה מסכמת

מפעל אורז מיץ באריזות של ליטר, ושוקל שתי אריזות סגורות:

- **אריזה א:** תיבה שבסיסה ריבוע שצלעו 8 ס״מ.
- **אריזה ב:** גליל שרדיוסו 5 ס״מ.

א. מצאו את הגובה של כל אריזה.

ב. מצאו את שטח הפנים של כל אריזה. באיזו אריזה דרוש פחות חומר?

ג. עלות החומר היא 0.002 שקלים לסמ״ר. מצאו את עלות החומר של כל אריזה.

ד. האריזות נשלחות בקרטון שמידותיו הפנימיות 40 ס״מ על 40 ס״מ על 32 ס״מ, כאשר הבסיס של כל אריזה מונח על הרצפה. כמה אריזות נכנסות בקרטון, בכל סוג?

ה. עלות המשלוח היא 6 שקלים לקרטון. איזו אריזה זולה יותר בסך הכול, לליטר מיץ? נמקו.

מה מתרגלים: שאלה הפוכה בשני גופים, שטח פנים, עיגול כלפי מטה באריזה, שיקולי כדאיות

פתרון מלא

סעיף א

ליטר הוא 1,000 סמ״ק.

אריזה א: $64h = 1{,}000$, ולכן $h = 15.625$.

אריזה ב: $25\pi h = 1{,}000$, ולכן $h = \frac{40}{\pi} \approx 12.73$.

תשובה: א: 15.625 ס״מ. ב: כ־12.73 ס״מ.

סעיף ב

אריזה א: $F = 2 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 15.625 = 128 + 500 = 628$.

אריזה ב: $F = 2\pi \cdot 25 + 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{40}{\pi} = 50\pi + 400 \approx 557.08$.

תשובה: א: 628 סמ״ר. ב: כ־557.08 סמ״ר. באריזה ב דרוש פחות חומר.

סעיף ג

אריזה א: $628 \cdot 0.002 = 1.256$. אריזה ב: $557.08 \cdot 0.002 \approx 1.114$.

תשובה: א: כ־1.26 שקלים. ב: כ־1.11 שקלים.

סעיף ד

- **אריזה א:** $40 \div 8 = 5$, כלומר 5 על 5, 25 בשכבה. בגובה: $15.625 \div 32 \approx 2.05$, כלומר 2 שכבות. סך הכול 50 אריזות.

© אור בן שטרית · אינסוף

- **אריזה ב:** הקוטר 10, ולכן $40 \div 10 = 4$ כלומר 4 על 4, 16 בשכבה. בגובה: $32 \div 12.73 \approx 2.51$ כלומר 2 שכבות. סך הכול 32 אריזות.

תשובה: א: 50 אריזות. ב: 32 אריזות.

סעיף ה

	חומר	משלוח לאריזה	סך הכול
אריזה א	1.256	$50 \div 6 = 0.12$	1.376
אריזה ב	1.114	$32 \div 6 = 0.1875$	1.302

אינטואיציה

אריזה ב יקרה יותר במשלוח (עיגולים מבזבזים מקום) אבל חוסכת בחומר. כל שיקול לבדו נותן תשובה אחרת, ולכן בשאלות כדאיות מחשבים את העלות הכוללת ומתייחסים לקריטריון שבשאלה.

תשובה: אריזה ב זולה יותר: כ־1.30 שקלים לעומת כ־1.38 שקלים.

13. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי ותרגול מעורב. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ. אם לא נאמר אחרת, עגלו תשובות לשתי ספרות אחרי הנקודה.

תרגיל מודרך 1 ארגז חול

ארגז חול בגן ציבורי הוא בצורת תיבה: אורכו 2 מטרים, רוחבו 1.5 מטרים וגובהו 0.4 מטרים. מצאו את הנפח, את שטח הדפנות (המעטפת) ואת כמות החול הדרושה למילוי של 75% מהארגז.

השלימו את הפתרון

הנפח: $V = 2 \cdot 1.5 \cdot 0.4 =$ _____ מ״ק.

המעטפת: $M = 2(a+b)\cdot h = 2(2+1.5)\cdot 0.4 =$ _____ מ״ר.

החול: _____ = _____ · _____ מ״ק.

מה מתרגלים: נפח ומעטפת של תיבה, אחוז מנפח

תרגיל מודרך 2 כוס תרמית

כוס תרמית בצורת גליל, בלי מכסה. רדיוס הבסיס שלה 4 ס״מ, ונפחה 320π סמ״ק. מצאו את גובה הכוס, ואת שטח החומר הדרוש לייצור דופן ובסיס.

השלימו את הפתרון

מהנפח: $h \cdot$ _____ $= \pi \cdot 320\pi$, ולכן $h =$ _____ ס״מ.

המעטפת: $M = 2\pi Rh =$ _____ π סמ״ר.

הבסיס: $S = \pi R^2 =$ _____ π סמ״ר.

ביחד: _____ $\pi \approx$ _____ סמ״ר.

מה מתרגלים: שאלה הפוכה בגליל, מעטפת ובסיס אחד

תרגיל מודרך 3 כובע מסיבה

כובע מסיבה בצורת חרוט, בלי בסיס. רדיוס הבסיס 5 ס״מ, וגובה החרוט 12 ס״מ. מצאו את אורך הקו היוצר, את שטח הקרטון של הכובע ואת נפח החרוט.

השלימו את הפתרון

הקו היוצר: $\ell^2 = h^2 + R^2 =$ _____, ולכן $\ell =$ _____ ס״מ.

הקרטון: $M = \pi R\ell =$ _____ $\pi \approx$ _____ סמ״ר.

הנפח: $V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h =$ _____ $\pi \approx$ _____ סמ״ק.

מה מתרגלים: קו יוצר, מעטפת ונפח של חרוט

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 1 נפח של פירמידה

בסיס פירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס״מ, וגובה הפירמידה 10 ס״מ. מצאו את נפח הפירמידה.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $S = 6^2 = 36$ סמ״ר

שורה 2 $V = S \cdot h$

שורה 3 $V = 36 \cdot 10 = 360$ סמ״ק

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ההבדל בין גוף ישר לגוף מחודד

מצאו את הטעות 2 גובה או קו יוצר?

רדיוס הבסיס של חרוט הוא 3 ס״מ, וגובהו 4 ס״מ. מצאו את נפח החרוט.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $\ell = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ ס״מ

שורה 2 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot \ell$

שורה 3 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 5 = 15\pi$ סמ״ק

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: איזו מידה נכנסת לאיזו נוסחה

מצאו את הטעות 3 המרת יחידות

מיכל בצורת תיבה מידותיו 30 ס״מ, 20 ס״מ ו־20 ס״מ. כמה ליטרים הוא מכיל?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $V = 30 \cdot 20 \cdot 20 = 12{,}000$ סמ״ק

שורה 2 בליטר אחד יש 100 סמ״ק.

שורה 3 $12{,}000 \div 100 = 120$ ליטרים

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: סמ״ק וליטרים

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 4 גובה של פאה

בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע אורך צלע הבסיס 10 ס״מ, וגובה הפירמידה 12 ס״מ. מצאו את גובה הפאה.

הפתרון של התלמיד

שורה 1	גובה הפאה הוא יתר במשולש ישר זווית שבתוך הפירמידה.
שורה 2	הניצבים של המשולש הם 12 ס״מ ו־10 ס״מ.
שורה 3	$\sqrt{(12^2 + 10^2)} = \sqrt{244} \approx 15.62$ ס״מ

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: המשולש ישר הזווית שבתוך הפירמידה

תרגול עצמאי נפח, מעטפת ושטח פנים

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. מידות תיבה הן 5 ס״מ, 4 ס״מ ו־3 ס״מ (הגובה). מצאו את הנפח, את שטח המעטפת ואת שטח הפנים.

2. שטח הפנים של קובייה הוא 150 סמ״ר. מצאו את אורך הצלע ואת הנפח.

3. רדיוס הבסיס של גליל הוא 3 ס״מ, וגובהו 10 ס״מ. מצאו את הנפח, את שטח המעטפת ואת שטח הפנים.

4. נפח גליל הוא 200π סמ״ק, וגובהו 8 ס״מ. מצאו את הרדיוס.

5. רדיוס הבסיס של חרוט הוא 9 ס״מ, וגובהו 12 ס״מ. מצאו את הקו היוצר, את הנפח ואת שטח המעטפת.

6. אורך הקו היוצר של חרוט הוא 17 ס״מ, ורדיוס הבסיס 8 ס״מ. מצאו את הגובה ואת הנפח.

7. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע אורך צלע הבסיס 8 ס״מ, והגובה 3 ס״מ. מצאו את הנפח, את גובה הפאה, את שטח המעטפת ואת שטח הפנים.

8. רדיוס של כדור הוא 6 ס״מ. מצאו את הנפח ואת שטח הפנים.

9. בריכה מתנפחת בצורת תיבה מידותיה 3 מטרים, 2 מטרים ו־0.5 מטרים (הגובה). ממלאים 60% מנפחה. (א) כמה ליטרים מים בבריכה? (ב) הצינור מזרים 30 ליטרים בדקה. כמה זמן נמשך המילוי?

10. בסיס של מנסרה ישרה הוא משולש ישר זווית שניצביו 6 ס״מ ו־8 ס״מ, וגובה המנסרה 10 ס״מ. מצאו את הנפח, את שטח המעטפת ואת שטח הפנים.

11. לגליל א רדיוס 2 ס״מ וגובה 12 ס״מ. לגליל ב רדיוס 4 ס״מ וגובה 3 ס״מ. (א) הראו שנפחיהם שווים. (ב) לאיזה גליל שטח מעטפת קטן יותר, ובכמה?

12. גוף מורכב מגליל שרדיוסו 3 ס״מ וגובהו 8 ס״מ, ומעליו חרוט בעל אותו בסיס שגובהו 4 ס״מ. (א) מצאו את נפח הגוף. (ב) מצאו את השטח החיצוני של הגוף, כולל הבסיס התחתון.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. מפעל מייצר נרות בצורת גליל. רדיוס הנר 2 ס״מ, וגובהו 10 ס״מ. (א) מצאו את נפח הנר. (ב) יוצקים נרות מגוש שעווה בצורת תיבה שמידותיה 30 ס״מ, 20 ס״מ ו־10 ס״מ. כמה נרות שלמים אפשר ליצוק? (ג) על כל נר מדביקים תווית שמכסה את כל המעטפת. מהו שטח התווית? (ד) כמה שעווה נשארת?

14. לגג של ביתן יש צורה של פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע. אורך צלע הבסיס 6 מטרים, וגובה הפירמידה 4 מטרים. (א) מצאו את גובה הפאה. (ב) מצאו את שטח הגג (ארבע הפאות). (ג) לכל מטר רבוע נדרשים 20 רעפים, ומזמינים עוד 10% לגיבוי. כמה רעפים מזמינים? (ד) מצאו את נפח החלל שמתחת לגג.

15. גביע גלידה בצורת חרוט שרדיוסו 3 ס״מ וגובהו 10 ס״מ מלא בגלידה, ומעליו חצי כדור של גלידה באותו רדיוס. (א) מצאו את נפח הגלידה. (ב) כמה גביעים שלמים אפשר להכין מ־3 ליטרים של גלידה? (ג) מצאו את שטח המעטפת של הגביע.

16. מיכל מים בצורת גליל. רדיוס הבסיס 1 מטר, והגובה 2.5 מטרים. (א) מצאו את נפח המיכל, במטרים מעוקבים ובליטרים. (ב) ממלאים את המיכל עד 40% מגובהו. מהו גובה המים, וכמה ליטרים יש בו? (ג) הצריכה היא 150 ליטרים ביום. לכמה ימים שלמים יספיקו המים?

17. (א) אורך הצלע של קובייה גדל ב־10%. בכמה אחוזים גדל הנפח, ובכמה אחוזים גדל שטח הפנים? (ב) בחרוט מכפילים את הרדיוס ומקטינים את הגובה לחצי. פי כמה משתנה הנפח? (ג) בכדור מכפילים את הרדיוס. פי כמה גדל הנפח, ופי כמה גדל שטח הפנים?

© אור בן שטרית · אינסוף

14. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

2. לקובייה 6 פאות זהות.

9. במטר מעוקב אחד יש 1,000 ליטרים.

12. הבסיס המשותף אינו חלק מהשטח החיצוני.

17. הציבו צלע של 10 ס״מ, והשוו לפני ואחרי.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

$V = 1.2$ מ״ק; $M = 2.8$ מ״ר; $0.75 \cdot 1.2 = 0.9$ מ״ק.

תרגיל מודרך 2

$h \cdot 16 \cdot \pi = 320\pi$, ולכן $h = 20$ ס״מ; $M = 160\pi$; $S = 16\pi$; $176\pi \approx 552.92$ סמ״ר.

תרגיל מודרך 3

$\ell^2 = 169$, $\ell = 13$ ס״מ; $M = 65\pi \approx 204.20$ סמ״ר; $V = 100\pi \approx 314.16$ סמ״ק.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: בגוף מחודד הנפח הוא שליש: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$. לכן $V = 120$ סמ״ק.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: בנפח משתמשים בגובה, ולא בקו היוצר: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$ סמ״ק.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: בליטר אחד יש 1,000 סמ״ק. לכן המיכל מכיל $12{,}000 \div 1{,}000 = 12$ ליטרים.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 2: הניצב שעל הבסיס הוא המרחק ממרכז הבסיס לאמצע הצלע, כלומר מחצית הצלע: 5 ס״מ. לכן גובה הפאה הוא $\sqrt{(12^2 + 5^2)} = 13$ ס״מ.

תשובות לתרגול העצמאי

1. $V = 60$ סמ״ק, $M = 54$ סמ״ר, $F = 94$ סמ״ר.

2. $a = 5$ ס״מ, $V = 125$ סמ״ק.

3. $V = 90\pi \approx 282.74$ סמ״ק, $M = 60\pi \approx 188.50$ סמ״ר, $F = 78\pi \approx 245.04$ סמ״ר.

4. $R^2 = 25$, ולכן $R = 5$ ס״מ.

5. $\ell = 15$ ס״מ, $V = 324\pi \approx 1{,}017.88$ סמ״ק, $M = 135\pi \approx 424.12$ סמ״ר.

6. $h = 15$ ס״מ, $V = 320\pi \approx 1{,}005.31$ סמ״ק.

7. $V = 64$ סמ״ק, גובה הפאה 5 ס״מ, $M = 80$ סמ״ר, $F = 144$ סמ״ר.

8. $V = 288\pi \approx 904.78$ סמ״ק, $F = 144\pi \approx 452.39$ סמ״ר.

9. (א) 1.8 מ״ק, שהם 1,800 ליטרים. (ב) 60 דקות.

10. $V = 240$ סמ״ק. היתר 10 ס״מ, ולכן $M = 240$ סמ״ר, $F = 288$ סמ״ר.

11. (א) בשניהם $V = 48\pi$ סמ״ק. (ב) לגליל ב: 24π לעומת 48π, כלומר קטן ב־$75.40 \approx 24\pi$ סמ״ר.

12. (א) $72\pi + 12\pi = 84\pi \approx 263.89$ סמ״ק. (ב) $\ell = 5$, ולכן $15\pi + 48\pi + 9\pi = 72\pi \approx 226.19$ סמ״ר.

13. (א) $40\pi \approx 125.66$ סמ״ק. (ב) $6{,}000 \div 125.66 \approx 47.75$, ולכן 47 נרות. (ג) $40\pi \approx 125.66$ סמ״ר. (ד) $6{,}000 - 47 \cdot 40\pi \approx 93.81$ סמ״ק.

14. (א) 5 מטרים. (ב) 60 מ״ר. (ג) $1{,}200 \cdot 1.1 = 1{,}320$ רעפים. (ד) 48 מ״ק.

15. (א) $48\pi \approx 150.80$ סמ״ק. (ב) $30\pi + 18\pi = 48\pi \approx 150.80$, ולכן 19 גביעים. (ג) $\ell = \sqrt{109}$, $M = 3\pi\sqrt{109} \approx 98.40$ סמ״ר.

16. (א) $2.5\pi \approx 7.85$ מ״ק, כ־7,854 ליטרים. (ב) 1 מטר, כ־3,142 ליטרים. (ג) 20 ימים שלמים.

17. (א) הנפח גדל ב־33.1%, ושטח הפנים גדל ב־21%. (ב) $2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$, כלומר הנפח גדל פי 2. (ג) הנפח גדל פי 8, ושטח הפנים גדל פי 4.

© אור בן שטרית · אינסוף

15. דף סיכום

הגוף	V	M	F	משולש ישר זווית
תיבה	abh	$2(a+b)h$	$M+2ab$	אלכסון בסיס: $\sqrt{(a^2+b^2)}$
קובייה	a^3	$4a^2$	$6a^2$	
מנסרה	Sh	Ph	$M+2S$	
גליל	$\pi R^2 h$	$2\pi Rh$	$M+2\pi R^2$	
חרוט	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$	$\pi R\ell$	$M+\pi R^2$	$\ell^2=h^2+R^2$
פירמידה	$\frac{1}{3}Sh$	סכום פאות	$M+S$	$f^2=h^2+(a\div 2)^2$
כדור	$\frac{4}{3}\pi R^3$		$4\pi R^2$	

יחידות

- 1 מ״ר = 10,000 סמ״ר.
- 1 מ״ק = 1,000,000 סמ״ק = 1,000 ליטר.
- 1 ליטר = 1,000 סמ״ק.

שינוי ממדים

- רדיוס פי k: הנפח פי k^2, המעטפת פי k.
- גובה פי k: הנפח והמעטפת פי k.
- כל הממדים פי k: נפח פי k^3, שטח פי k^2.
- גדל ב־$p\%$: פי $1+p\div 100$.

מילים ועיגול

- למלא, להכיל: נפח. לכסות, לצבוע, לעטוף: שטח.
- «לכל היותר»: עיגול למטה. «לפחות»: עיגול למעלה.

שאלה הפוכה

- גליל: $h=V\div(\pi R^2)$, $R^2=V\div(\pi h)$.
- גליל, מעטפת: $h=M\div(2\pi R)$.
- פירמידה: $h=3V\div S$.
- היקף: $R=P\div(2\pi)$.

מתכון לשאלה בבחינה

1. מסמנים נתונים על הסרטוט, ובודקים רדיוס או קוטר.
2. מחליטים: נפח, מעטפת או שטח פנים?
3. אם חסרה מידה: משולש ישר זווית.
4. כותבים נוסחה, מציבים, משאירים π.
5. בודקים יחידות, ומעגלים לפי ההקשר.
6. בהחלטה: משווים ומנמקים במשפט.

© אור בן שטרית · אינסוף