גאומטרייה אנליטית: הקו הישר

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

גאומטרייה אנליטית מתרגמת צורות למספרים: כל נקודה היא זוג שיעורים, כל ישר הוא משוואה, וכל טענה גאומטרית הופכת לחישוב. **תלמיד** ילמד כאן לתרגם את המילים של השאלה לפעולות. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2023–2026 ורצף הוראה. בסוף הקובץ תרגול מודרך, פתרונות עם טעות, תרגול עצמאי ומעורב, תשובות ורמזים.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**
2. הרעיון: כל משפט גאומטרי הוא משוואה **3**
3. מרחק ואמצע קטע **3**
4. שיפוע ומשוואת ישר **4**
5. מקביל, מאונך וחיתוך **6**
6. צורות: איך מזהים ואיך מוכיחים **7**
7. חישוב שטחים **7**
8. מפת החלטה: מה מבקשים ומה עושים **8**
9. טיפים וטריקים **8**
10. טעויות נפוצות **9**
11. למורה: רצף הוראה מוצע **10**
12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **11**
תרגיל 1: משולש על רשת: מרחק, אמצע ושטח 11
תרגיל 2: ישר לפי שיפוע ונקודה, ומשולש עם הצירים 12
תרגיל 3: התאמת משוואות לישרים 14
תרגיל 4: משולש שווה שוקיים וגובה לבסיס 16
תרגיל 5: מקבילית או מעוין? 18
תרגיל 6: משולש ישר זווית עם קודקודים על ציר 19
תרגיל 7: טרפז ישר זווית והתאמת משוואות 21
תרגיל 8: מרובע שאלכסוניו מאונכים 23
תרגיל 9: גובה לצלע משופעת, ושטח בשתי דרכים 25
תרגיל 10: אנך אמצעי וריבוע: שאלה מסכמת ברמת בגרות 27
13. תרגול נוסף **29**
14. תשובות ורמזים **33**
15. דף סיכום **34**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בשאלון 35372 מופיעה שאלה אחת בגאומטרייה אנליטית. נתונה צורה במערכת צירים, כמה שיעורים ומשוואת ישר, והסעיפים בונים את הצורה קודקוד אחר קודקוד. סעיף הסיום הוא כמעט תמיד שטח, היקף או הוכחה.

1. **קודקודים ראשונים:** נקודה על ציר, נקודה שהיא אמצע קטע, או חיתוך ישר עם ציר.
2. **שיפוע ומשוואה:** בדרך כלל ישר מאונך או מקביל לישר אחר.
3. **קודקוד נוסף:** חיתוך של שני ישרים או תנאי כמו «מקביל לציר ה־x».
4. **הוכחה:** משולש שווה שוקיים (השוואת אורכים), ישר זווית (מכפלת שיפועים).
5. **חישוב מסכם:** שטח או היקף של משולש או מרובע.

מועד	שאלה	הצורה	הכלים המרכזיים	סעיף הסיום
קיץ 2023	3	משולש ובתוכו נקודה על צלע	נקודות על ציר, הוכחת ניצבות בשיפועים, ישר לפי שיפוע ונקודה, חיתוך ישרים	שטח משולש ושטח מרובע
קיץ 2024 א	1	משולש שווה שוקיים וגובה לבסיס	שיפוע, ישר מאונך, נקודה על ציר, אמצע הבסיס, ישר מקביל	היקף משולש
קיץ 2024 ב	1	מרובע שאלכסוניו מאונכים	נקודות על הצירים, ישר מאונך, חיתוך אלכסונים, אמצע קטע, הוכחת שוויון צלעות	היקף מרובע
קיץ 2025 א	2	משולש ישר זווית ונקודה נוספת	אמצע קטע, שיפוע, ישר מאונך, ישר מקביל לציר, הוכחת שווה שוקיים	היקף מרובע
קיץ 2025 ב	2	משולש ישר זווית	ישר נתון, נקודה על ציר, ישר מאונך, חיתוך ישרים, אמצע קטע, חיתוך עם ציר	שטח משולש
קיץ 2026 א	2	טרפז ישר זווית	אמצע קטע, שיפוע, ישר מאונך, נקודה על ציר, התאמת משוואות לישרים, חיתוך ישרים	שטח משולש
קיץ 2026 ב	2	מרובע	נקודות על הצירים, ישר מאונך, ישר מקביל לציר, אמצע קטע, הוכחת שווה שוקיים	היקף משולש

מה לומדים מהטבלה

בכל שבעת המועדים מופיע **ישר מאונך לישר אחר**, וברובם גם **אמצע קטע**. מי ששולט בשלושת המהלכים «שיפוע, ישר מאונך, חיתוך» יפתור את רוב השאלה. ברוב השאלות המספרים יוצאים נוחים. קיבלתם מספרים מסורבלים מאוד? כדאי לבדוק את החישוב.

מה יש בדף הנוסחאות

בדף הנוסחאות מופיעים נוסחת השיפוע, משוואת ישר לפי שיפוע ונקודה, אמצע קטע, מרחק בין נקודות, תנאי ההקבלה ותנאי הניצבות. אין צורך לשנן אותם, אבל צריך לדעת **מתי** משתמשים בכל אחד, וזה מה שהחוברת הזאת מלמדת.

© אור בן שטרית · אינסוף

2. הרעיון: כל משפט גאומטרי הוא משוואה

כמעט כל הקושי בנושא הוא תרגום. כשקוראים את השאלה, ממירים כל ביטוי לפעולה אלגברית:

בשאלה כתוב	בשפת האלגברה
הנקודה נמצאת על ציר ה־x	$y = 0$
הנקודה נמצאת על ציר ה־y	$x = 0$
הנקודה נמצאת על הישר	שיעורי הנקודה מקיימים את משוואת הישר, ואפשר להציב
E היא אמצע הקטע AB	כל שיעור של E הוא הממוצע של השיעורים של A ו־B
הישרים מקבילים	$m_1 = m_2$ ($b_1 \neq b_2$ ו־)
הישרים מאונכים, או זווית ישרה ביניהם	$m_1 \cdot m_2 = -1$
הישר מקביל לציר ה־x	$y = k$, ושיפועו 0
הישר מקביל לציר ה־y	$x = k$, ואין לו שיפוע
נקודת החיתוך של שני ישרים	פתרון של שתי המשוואות יחד
המשולש שווה שוקיים	שתי צלעות שוות באורכן

אינטואיציה

משוואת ישר היא «תנאי כניסה»: נקודה נמצאת על הישר אם ורק אם שיעוריה מקיימים את המשוואה. לכן נקודת חיתוך של שני ישרים היא נקודה שעומדת בשני התנאים בו בזמן, וזו בדיוק מערכת משוואות.

למורה

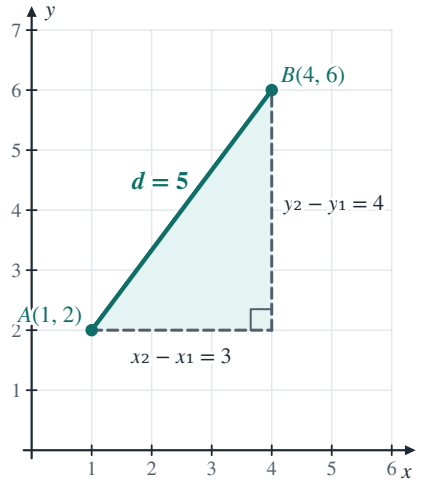
כדאי לבנות עם הכיתה את הטבלה הזאת כ«מילון» על הלוח, ולהוסיף לו שורות במהלך היחידה. לפני פתרון שאלה מלאה, בקשו מהתלמידים רק לתרגם כל משפט בשאלה לשורה אלגברית, בלי לחשב. התרגיל הזה מפריד בין הקושי בקריאה לבין הקושי בחישוב.

3. מרחק ואמצע קטע

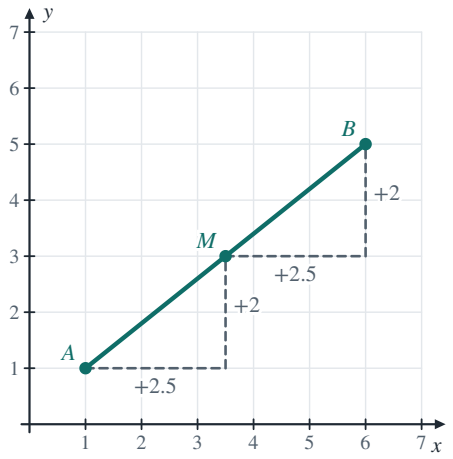
מרחק בין שתי נקודות

$$d = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$$

© אור בן שטרית · אינסוף



המרחק הוא היתר של משולש ישר זווית



נקודת האמצע: אותו צעד ב־x וב־y בשני החצאים

נימוק: למה זה נכון?

הפרש שיעורי ה־x והפרש שיעורי ה־y הם הניצבים של משולש ישר זווית, והקטע AB הוא היתר. הנוסחה היא משפט פיתגורס. סדר הנקודות לא משנה, כי ההפרשים מועלים בריבוע.

דוגמה: $A(1,2)$ ו־$B(4,6)$ נותנות $d=\sqrt{(3^2+4^2)}=\sqrt{25}=5$.

כאשר הקטע מקביל לציר, אין צורך בנוסחה: האורך הוא הפרש השיעורים שמשתנים. למשל מ־$(0,6)$ עד $(10,6)$ האורך הוא 10.

אמצע קטע

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

אינטואיציה: הקפיצה

אמצע הקטע נמצא באותה קפיצה משני הקצוות. מי שמכיר קצה אחד ואת האמצע, קופץ פעם נוספת באותה קפיצה ומגיע לקצה השני.

דוגמה: $A(0,6)$, והאמצע הוא $E(3,0)$. מ־A ל־E הקפיצה היא 3+ ב־x ו־6− ב־y, ולכן $B(3+3,0-6)=B(6,-6)$. בכתיב אלגברי: $B=2E-A$, כלומר מכפילים את שיעורי האמצע ומחסירים את הקצה הידוע.

טעות נפוצה

מציבים את הנקודה הידועה ואת האמצע בנוסחת האמצע כאילו הם שני הקצוות. בדיקה מהירה: האמצע חייב להיות **בין** שני הקצוות.

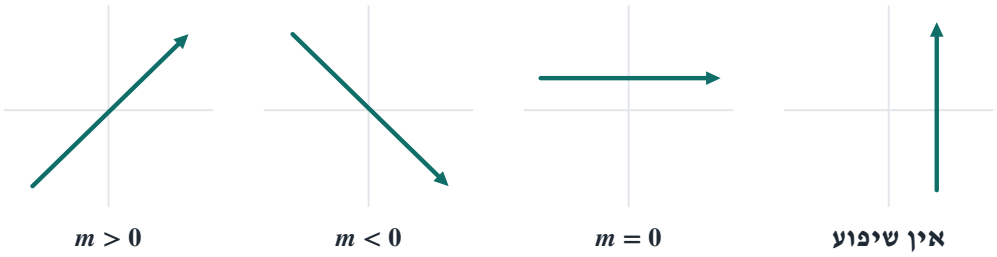
4. שיפוע ומשוואת ישר

שיפוע

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

© אור בן שטרית · אינסוף

השיפוע אומר בכמה משתנה y כאשר x גדל ב־1. אם $m = 2$, כל צעד ימינה עולה 2. אם $m = -½$, כל צעד ימינה יורד חצי.



ישר עולה, יורד, אופקי ($y = k$) ואנכי ($x = k$)

נימוק: למה השיפוע קבוע לאורך הישר?

בוחרים שתי נקודות על הישר ומקבלים משולש ישר זווית שהיתר שלו על הישר. כל משולש כזה דומה לכל משולש אחר על אותו ישר, כי הזוויות שלהם שוות. במשולשים דומים יחס הניצבים קבוע, ולכן השיפוע לא תלוי בנקודות שנבחרו. זה חיבור ישיר לדמיון משולשים ולטנגנס מכיתה י״א.

חשוב: אם $x_1 = x_2$ המכנה הוא 0, ולישר אנכי אין שיפוע. משוואתו $x = k$.

משוואת ישר

$$y = mx + b$$

כאן m הוא השיפוע, ו־b הוא שיעור ה־y של נקודת החיתוך עם ציר ה־y: בהצבה $x = 0$ מתקבל $y = b$.

ישר לפי שיפוע ונקודה:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

נימוק: למה זה נכון?

נקודה כללית (x, y) נמצאת על הישר אם השיפוע בינה לבין (x_1, y_1) שווה ל־m, כלומר $(y - y_1) \div (x - x_1) = m$. כפל במכנה נותן את הנוסחה.

דרך שתי נקודות

מחשבים שיפוע, ואז מציבים נקודה אחת בנוסחה.

$(1, 2)$ ו־$(3, 8)$: $m = 6 \div 2 = 3$, ולכן

$y - 2 = 3(x - 1)$, כלומר $y = 3x - 1$.

צורה כללית לצורה מפורשת

מבודדים את y כדי לקרוא את השיפוע.

$2x + 3y - 6 = 0$ נותן $3y = -2x + 6$, כלומר

$y = -⅔x + 2$.

טיפ: בדיקה בשתי שניות

אחרי שמצאתם משוואת ישר, הציבו בה נקודה שנתונה בשאלה. אם היא לא מקיימת את המשוואה, יש טעות. הבדיקה הזו תופסת את רוב טעויות הסימן.

התאמה בין ישר בסרטוט למשוואה

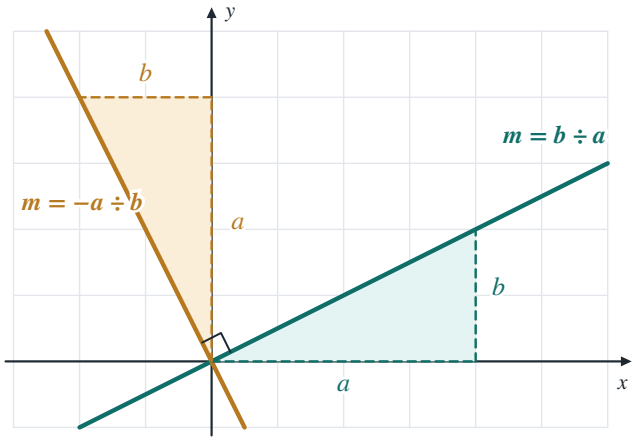
- **כיוון:** ישר עולה (משמאל לימין) הוא בעל שיפוע חיובי, וישר יורד הוא בעל שיפוע שלילי.
- **תלילות:** ככל ש־$|m|$ גדול יותר, הישר תלול יותר.
- **חיתוך עם ציר ה־y:** קוראים את b ישירות מהסרטוט.

© אור בן שטרית · אינסוף

5. מקביל, מאונך וחיתוך

המצב ההדדי	התנאי על הישרים $y = m_1x + b_1$ ו־$y = m_2x + b_2$	כמה נקודות משותפות
מתלכדים	$m_1 = m_2$ וגם $b_1 = b_2$	אינסוף
מקבילים	$m_1 = m_2$ ו־$b_1 \neq b_2$	אף אחת
נחתכים	$m_1 \neq m_2$	אחת
מאונכים (מקרה פרטי של נחתכים)	$m_1 \cdot m_2 = -1$	אחת

למה מאונך פירושו מכפלה -1?



סיבוב של משולש השיפוע ב־$90°$ מחליף בין הניצבים והופך סימן אחד

נימוק: למה זה נכון?

משולש שיפוע של ישר הוא: צעד a ימינה וצעד b למעלה, ולכן $m_1 = b \div a$. מסובבים את הישר ב־$90°$: הצעד ימינה הופך לצעד למעלה, והצעד למעלה הופך לצעד שמאלה. הישר החדש עולה a כאשר הוא זז b שמאלה, ולכן $m_2 = -a \div b$. המכפלה היא $(-a \div b) \cdot (b \div a) = -1$.

טריק: הפוך ושנה סימן

כדי לקבל שיפוע מאונך, הופכים את השבר ומשנים סימן: $2 \to -\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3} \to \frac{3}{2}$, $-3 \to \frac{1}{3}$, $-4 \to \frac{1}{4}$. בבדיקה, המכפלה חייבת להיות -1.

יוצא מן הכלל: ישר אופקי $y = k$ וישר אנכי $x = c$ מאונכים זה לזה, אף על פי שלישר האנכי אין שיפוע. הכלל של המכפלה לא חל עליהם, ומספיק לציין שאחד מקביל לציר ה־x והשני לציר ה־y.

מציאת נקודות חיתוך

עם הצירים

עם ציר ה־y: מציבים $x = 0$.

עם ציר ה־x: מציבים $y = 0$.

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ חותך את ציר ה־y ב־$(0, 4)$ ואת ציר ה־x ב־$(8, 0)$.

בין שני ישרים

משווים את שני הביטויים של y, פותרים, ומציבים חזרה.

$2x = -\frac{1}{2}x + 4$ נותן $2.5x = 4$, ולכן $x = 1.6$, $y = 3.2$.

© אור בן שטרית · אינסוף

6. צורות: איך מזהים ואיך מוכיחים

הצורה	איך מוכיחים במערכת צירים	תכונה שימושית
משולש שווה שוקיים	שתי צלעות באורך שווה	הגובה לבסיס הוא גם תיכון: הוא חוצה את הבסיס
משולש ישר זווית	מכפלת שיפועים -1, או משפט פיתגורס ההפוך	השטח הוא חצי מכפלת הניצבים
מקבילית	שני זוגות צלעות מקבילות, או שלאלכסונים אותו אמצע	קודקוד רביעי: $D = A + C - B$
מלבן	מקבילית עם זווית ישרה, או מקבילית שאלכסוניה שווים	השטח הוא מכפלת שתי צלעות סמוכות
מעוין	מקבילית עם שתי צלעות סמוכות שוות, או מקבילית שאלכסוניה מאונכים	השטח הוא חצי מכפלת האלכסונים
ריבוע	מעוין עם זווית ישרה, או מעוין שאלכסוניו שווים	השטח הוא חצי מכפלת האלכסונים, או ריבוע הצלע
טרפז	זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות (שיפועים שווים)	ישר זווית: השוק הניצבת היא הגובה
דלתון	שני זוגות של צלעות סמוכות שוות	האלכסונים מאונכים, והשטח הוא חצי מכפלתם

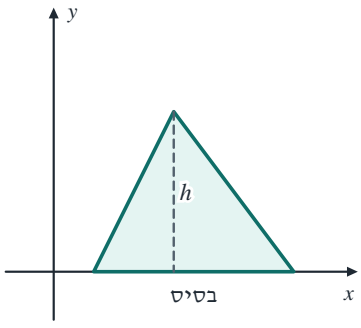
אינטואיציה: הקודקוד הרביעי של מקבילית

במקבילית ABCD אותה תזוזה מובילה מ־B ל־A ומ־C ל־D. לכן $D = C + (A - B) = A + C - B$. דרך שקולה: לשני האלכסונים אמצע משותף, ולכן $A + C = B + D$.

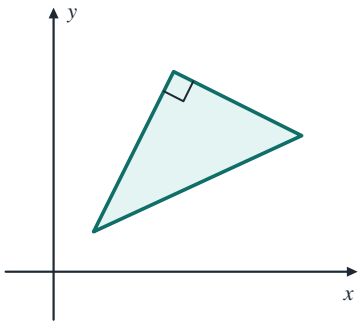
טיפ: הוכחה היא חישוב ומשפט

כדי להוכיח ש־ABC שווה שוקיים, מחשבים שתי צלעות **בלבד**, ומסיימים במשפט: «$AB = AC$, ולכן המשולש שווה שוקיים». אין צורך בשלישית. כדי להוכיח ניצבות, מחשבים שני שיפועים וכותבים: «$m_1 \cdot m_2 = -1$, ולכן הצלעות מאונכות».

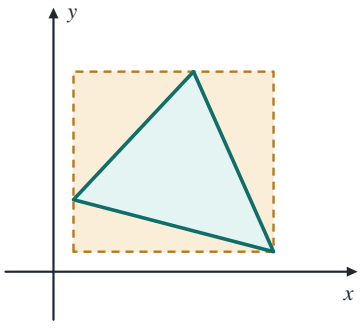
7. חישוב שטחים



צלע על ציר: בסיס וגובה



זווית ישרה: חצי ממכפלת הניצבים



המלבן החוסם פחות הפינות

© אור בן שטרית · אינסוף

1. **צלע על ציר או מקבילה לציר:** זו הבחירה הראשונה. הבסיס הוא הפרש השיעורים, והגובה הוא הפרש השיעורים בכיוון השני. במשולש שקודקודיו $E(3,\,0)$, $C(18,\,0)$, $D(28,\,20)$ הבסיס הוא 15 והגובה הוא 20, בלי שום שורש.
2. **זווית ישרה:** השטח הוא חצי מכפלת הניצבים. לעיתים קרובות השורשים מתבטלים: $\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1{,}600}=20$.
3. **גובה לצלע משופעת:** מוצאים את משוואת הגובה, את נקודת החיתוך שלו עם הצלע, ואת אורך הגובה.
4. **מלבן חוסם:** מקיפים את הצורה במלבן שצלעותיו מקבילות לצירים ומחסירים את המשולשים ישרי הזווית שבפינות.
5. **פירוק:** מחלקים מרובע לשני משולשים נוחים. בטרפז אפשר להשתמש בנוסחה: מחצית סכום הבסיסים כפול הגובה.

טריק: אל תמהרו לחשב שורשים

השאירו את האורכים כשורשים עד הסוף: $\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}=\sqrt{1{,}600}=40$. בחישוב עם שברים עשרוניים מעוגלים מתקבלת תוצאה לא מדויקת.

למורה

בדיקה למורה: אפשר לאמת כל שטח של מצולע בנוסחת השרוכים (סכום הפרשי מכפלות שיעורים עוקבים, בחלוקה ב־2). הנוסחה אינה חלק מתוכנית 3 יחידות, ולכן היא מיועדת להכנת תרגילים ולבדיקה בלבד. בפתרון התלמיד מצופה להשתמש בבסיס וגובה או בפירוק.

8. מפת החלטה: מה מבקשים ומה עושים

המשימה בשאלה	המהלך
מצאו את שיעורי הנקודה שעל ציר	מציבים $x=0$ או $y=0$ במשוואת הישר
מצאו את הקצה השני של הקטע	קפיצה מהקצה הידוע דרך האמצע
מצאו את משוואת הצלע המאונכת	הופכים את שיפוע הצלע הנתונה ומשנים סימן, ואז $y-y_1=m(x-x_1)$
הצלע מקבילה לציר	כותבים $y=k$ או $x=k$ לפי נקודה ידועה
מצאו קודקוד שהוא חיתוך צלעות	משווים את שתי המשוואות, ומציבים חזרה
קבעו איזו משוואה מתאימה לישר	בודקים שיפוע (מקביל, מאונך) ומציבים נקודה
הראו שהמשולש שווה שוקיים	מחשבים שני אורכים, ומסיימים במשפט
הוכיחו שהזווית ישרה	מחשבים שני שיפועים, ובודקים שהמכפלה -1
חשבו היקף	מחברים את כל הצלעות, ומעגלים רק בסוף
חשבו שטח	מחפשים צלע מקבילה לציר, אחר כך זווית ישרה, ולבסוף מלבן חוסם

9. טיפים וטריקים

1. **כתבו את השיעורים על הסרטוט** מיד כשמצאתם אותם. הסרטוט הופך לדף עבודה, ורואים מה עוד חסר.
2. **הסתכלו על הסרטוט כבקרה:** אם הקודקוד נראה מימין לציר ויצא לכם x שלילי, יש טעות. אפשר להסתמך על הסדר הכללי של הנקודות, גם אם הסרטוט אינו מדויק.

© אור בן שטרית · אינסוף

3. **אותו סדר בשיפוע:** אם התחלתם במונה מנקודה ב׳, התחילו גם במכנה מנקודה ב׳.
4. **סוגריים למספרים שליליים:** $y - (-2)$, $(-3)^2$. המחשבון וגם העין טועים בלי סוגריים.
5. **נוח לעבוד עם שברים פשוטים:** $m = ½$ קל יותר מ־0.5 כשהופכים שיפוע. אפשר גם לכפול משוואה במכנה.
6. **הישר המאונך עובר דרך נקודה מסוימת:** בדקו דרך איזו נקודה הוא עובר לפי השאלה, בדרך כלל הקודקוד שבו הזווית הישרה.
7. **שיעור אחד ידוע:** «שיעור ה־y של B הוא 8» מספיק להצבה במשוואת הישר שעליו B נמצאת.
8. **צלע מקבילה לציר ה־x:** לכל הנקודות שעליה אותו y. לכן מספיק לדעת נקודה אחת כדי לכתוב את המשוואה.
9. **עיגול רק בסוף:** היקף מחשבים עם שורשים ומעגלים בשורה האחרונה, בדרך כלל לשתי ספרות אחרי הנקודה.
10. **נמקו בקצרה:** «AD מקביל ל־BC, ולכן $m = ½$». משפט כזה מזכה בנקודות גם אם נפלה טעות חישוב בהמשך.

10. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
שיפוע הפוך: $(x_2 - x_1) \div (y_2 - y_1)$	מתבלבלים בין מונה למכנה	השיפוע הוא «עלייה חלקי התקדמות»: y במונה
שיפוע מאונך בלי שינוי סימן	זוכרים רק «להפוך»	המכפלה חייבת לצאת -1, ולא 1
חיתוך עם ציר ה־x בהצבה $x = 0$	השם של הציר מטעה	על ציר ה־x מתקיים $y = 0$
כתיבת $y = mx + b$ עם b שאינו מתאים	מציבים את הנקודה בלי לבודד	אחרי פתיחת סוגריים בודקים בנקודה נתונה
אורך קטע בלי ריבוע או בלי שורש	כותבים $d = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$	חוזרים למשולש ולמשפט פיתגורס
ישר אנכי עם «שיפוע 0»	מערבבים בין אופקי לאנכי	אופקי: שיפוע 0. אנכי: אין שיפוע
מציאת נקודה רק לפי x	שוכחים להציב חזרה	התשובה לחיתוך היא זוג מספרים
שטח: הגובה אינו מאונך לבסיס	לוקחים צלע משופעת כגובה	בסיס וגובה חייבים להיות מאונכים

© אור בן שטרית · אינסוף

11. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים מקצה לנושא 25 שעות. הרצף בונה כל מיומנות על קודמתה, בסדר של קבוצות הדוגמאות בתוכנית.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
נקודות וקטעים	5	מרחק, אמצע, קצה שני, היקף ושטח עם צלעות מקבילות לצירים	«למה נוסחת המרחק היא בעצם פיתגורס?»
שיפוע ומשוואה	6	משמעות השיפוע, $y = mx + b$, ישר לפי נקודה ושיפוע או לפי שתי נקודות	«מה קורה ל־y כשמתקדמים צעד אחד ימינה?»
מצב הדדי וחיתוך	5	מקביל, מתלכד, נחתך; חיתוך עם צירים ובין ישרים; זיהוי מרובעים	«מתי למערכת משוואות אין פתרון, ומה זה אומר על הישרים?»
ניצבות	4	תנאי המכפלה, ישר מאונך, גובה במשולש	«מה קורה לשיפוע כשמסובבים ישר ב־$90°$?»
צורות ושטחים	2	הוכחות, פירוק, מלבן חוסם	«איזו צלע הכי נוח לבחור כבסיס?»
שילוב לקראת בגרות	3	שאלות מלאות לפי השלד	«מה הקודקוד הבא שאפשר למצוא, ובעזרת מה?»

למורה: הדגמה שעובדת

ציירו על לוח משבצות ישר בעל שיפוע ½ ומשולש שיפוע. סובבו דף שקוף ב־$90°$ סביב נקודה על הישר, וקראו את השיפוע החדש. התלמידים רואים את ההיפוך ואת שינוי הסימן בלי אלגברה, והכלל הופך ממשהו שמשננים למשהו שרואים.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. הסרטוטים שבשאלות הם סקיצות שאינן בקנה מידה, והסרטוטים שבפתרונות מדויקים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 משולש על רשת: מרחק, אמצע ושטח

נתון המשולש ABC שקודקודיו $A(1,\,2)$, $B(7,\,2)$, $C(4,\,6)$.

א. חשבו את אורך הצלע AB.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M, אמצע הצלע AB.

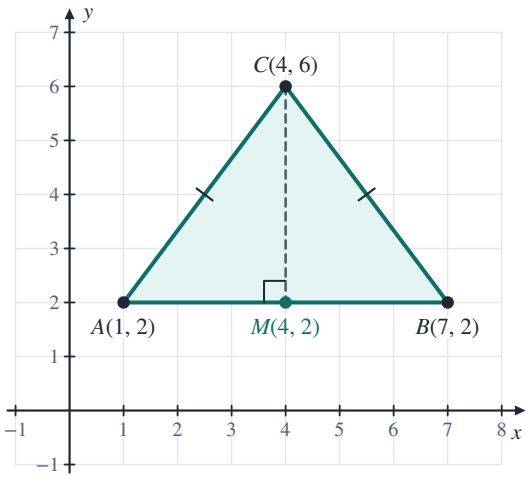
ג. חשבו את אורכי הצלעות AC ו־BC. הראו כי המשולש שווה שוקיים.

ד. חשבו את היקף המשולש.

ה. חשבו את שטח המשולש.

מה מתרגלים: צלע מקבילה לציר, אמצע קטע, נוסחת מרחק, הוכחת שווה שוקיים, שטח

פתרון מלא



משולש שווה שוקיים: התיכון לבסיס הוא גם הגובה

סעיף א

לנקודות A ו־B אותו שיעור y, ולכן הצלע מקבילה לציר ה־x, ואורכה הוא הפרש שיעורי ה־x:

$$AB = 7 - 1 = 6$$

תשובה: $AB = 6$.

סעיף ב

$$x = \frac{1+7}{2} = 4 \qquad y = \frac{2+2}{2} = 2$$

תשובה: $M(4,\,2)$.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ג

$$AC = \sqrt{((4-1)^2 + (6-2)^2)} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$$
$$BC = \sqrt{((4-7)^2 + (6-2)^2)} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$$

תשובה: $AC = BC = 5$, ולכן המשולש שווה שוקיים.

סעיף ד

$$P = 6 + 5 + 5 = 16$$

תשובה: ההיקף הוא 16.

סעיף ה

הבסיס AB מקביל לציר ה־x, ולכן הגובה אליו מקביל לציר ה־y, והוא הפרש שיעורי ה־y: $h = 6 - 2 = 4$.
במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס עובר דרך אמצע הבסיס, וכך אכן גם ל־C וגם ל־M יש $x = 4$.

$$S = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

תשובה: השטח הוא 12.

תרגיל 2 ישר לפי שיפוע ונקודה, ומשולש עם הצירים

ישר עובר דרך הנקודה $P(2, 3)$, ושיפועו $-\frac{1}{2}$.

א. מצאו את משוואת הישר.

ב. הישר חותך את ציר ה־x בנקודה A ואת ציר ה־y בנקודה B. מצאו את שיעורי A ו־B.

ג. O היא ראשית הצירים. חשבו את שטח המשולש OAB.

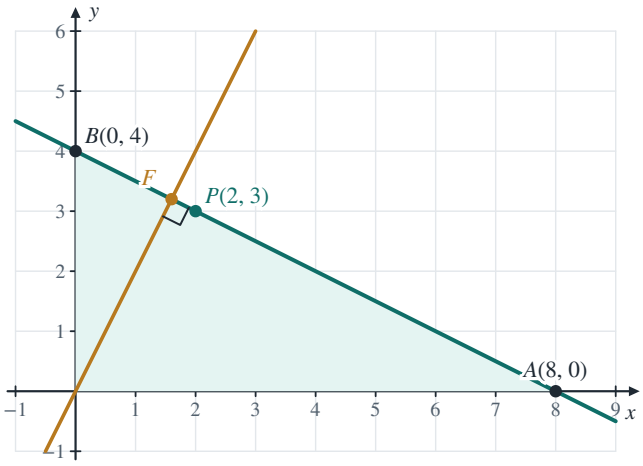
ד. חשבו את אורך הקטע AB ואת היקף המשולש OAB.

ה. דרך O מעבירים ישר המאונך ל־AB, והוא חותך את AB בנקודה F.
(1) מצאו את משוואת הישר OF ואת שיעורי F.
(2) חשבו את השטח בדרך נוספת: $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot OF$.

מה מתרגלים: משוואת ישר, חיתוך עם הצירים, ישר מאונך, חיתוך ישרים, שתי דרכים לשטח

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא



הישר, הצירים והגובה מראשית הצירים

סעיף א

$$\begin{aligned} y-3 &= -\tfrac{1}{2}(x-2) \\ y-3 &= -\tfrac{1}{2}x+1 \\ y &= -\tfrac{1}{2}x+4 \end{aligned}$$

בדיקה: בהצבת $x=2$ מתקבל $y=-1+4=3$, כנדרש.

תשובה: $y=-\tfrac{1}{2}x+4$.

סעיף ב

על ציר ה־x מתקיים $y=0$: $0=-\tfrac{1}{2}x+4$, ולכן $x=8$. על ציר ה־y מתקיים $x=0$, ולכן $y=4$.

תשובה: $A(8,\,0)$, $B(0,\,4)$.

סעיף ג

המשולש ישר זווית בראשית הצירים, והניצבים הם $OA=8$, $OB=4$:

$$S=\frac{8\cdot 4}{2}=16$$

תשובה: השטח הוא 16.

סעיף ד

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(8^2+4^2)}=\sqrt{80}\approx 8.94 \\ P &= 8+4+\sqrt{80}\approx 20.94 \end{aligned}$$

תשובה: $AB=\sqrt{80}\approx 8.94$, וההיקף הוא בקירוב 20.94.

סעיף ה

(1) שיפוע AB הוא $-\tfrac{1}{2}$, ולכן שיפוע המאונך הוא 2. הישר עובר דרך הראשית, ומשוואתו $y=2x$. חיתוך עם AB:

© אור בן שטרית · אינסוף

$$2x = -\tfrac{1}{2}x + 4$$
$$2.5x = 4$$
$$x = 1.6$$

מציבים: $y = 2 \cdot 1.6 = 3.2$, ולכן $F(1.6, 3.2)$.

(2) $OF = \sqrt{(1.6^2 + 3.2^2)} = \sqrt{12.8}$. לכן:

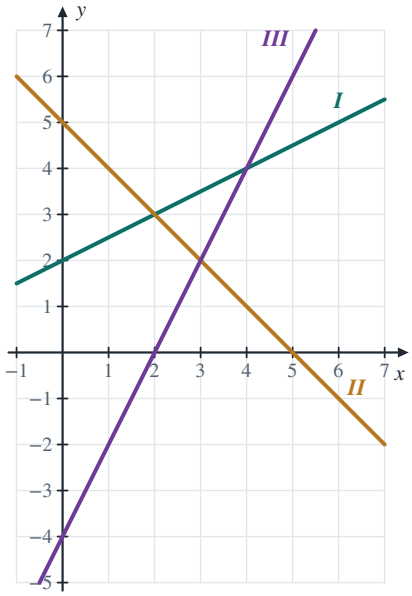
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{12.8} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1{,}024} = \tfrac{1}{2} \cdot 32 = 16$$

תשובה: (1) $y = 2x$, $F(1.6, 3.2)$. (2) השטח הוא 16, בדיוק כמו בסעיף ג.

תרגיל 3 התאמת משוואות לישרים

בסרטוט שלושה ישרים I, II, III. לפניכם המשוואות שלהם, שלא לפי הסדר:

$$y = 2x - 4 \qquad y = -x + 5 \qquad y = \tfrac{1}{2}x + 2$$



שלושה ישרים

א. התאימו כל משוואה לישר המתאים. נמקו.

ב. הנקודה A היא חיתוך הישרים $y = 2x - 4$ ו־$y = -x + 5$. הנקודה B היא חיתוך הישרים $y = -x + 5$ ו־$y = \tfrac{1}{2}x + 2$. הנקודה C היא חיתוך הישרים $y = 2x - 4$ ו־$y = \tfrac{1}{2}x + 2$. מצאו את שיעורי הנקודות.

ג. הראו כי המשולש ABC שווה שוקיים.

ד. חשבו את שטח המשולש ABC.

מה מתרגלים: קריאת שיפוע מסרטוט, חיתוך ישרים, הוכחת שווה שוקיים, שטח בעזרת מלבן חוסם

פתרון מלא

סעיף א

- רק לישר II שיפוע שלילי (הוא יורד), ולכן הוא $y = -x + 5$. הוא אכן חותך את ציר ה־y ב־5.

© אור בן שטרית · אינסוף

- ישר III תלול יותר מישר I, ולכן לו השיפוע הגדול יותר: $y = 2x - 4$. הוא חותך את ציר ה־y ב־-4.
- ישר I הוא $y = \frac{1}{2}x + 2$, שחותך את ציר ה־y ב־2.

תשובה: ישר I: $y = \frac{1}{2}x + 2$. ישר II: $y = -x + 5$. ישר III: $y = 2x - 4$.

סעיף ב

$$2x - 4 = -x + 5 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3,\ y = 2$$
$$-x + 5 = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow 3 = 1.5x \rightarrow x = 2,\ y = 3$$
$$2x - 4 = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow 1.5x = 6 \rightarrow x = 4,\ y = 4$$

תשובה: $A(3, 2)$, $B(2, 3)$, $C(4, 4)$.

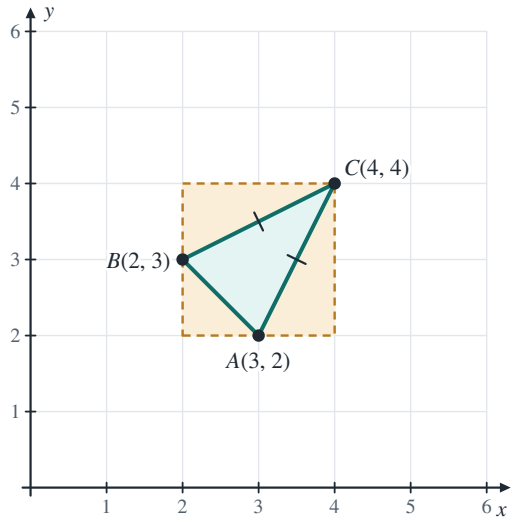
סעיף ג

$$CA = \sqrt{((4-3)^2 + (4-2)^2)} = \sqrt{5}$$
$$CB = \sqrt{((4-2)^2 + (4-3)^2)} = \sqrt{5}$$

תשובה: $CA = CB = \sqrt{5}$, ולכן המשולש שווה שוקיים.

סעיף ד

אין צלע מקבילה לציר, ולכן נשתמש במלבן חוסם: הריבוע שבין $x = 2$ ל־$x = 4$ ובין $y = 2$ ל־$y = 4$, ששטחו 4.



המשולש ABC בתוך הריבוע החוסם אותו

שלושת המשולשים שבפינות הם ישרי זווית:

- בפינה $(2, 2)$: הניצבים הם 1 ו־1, והשטח הוא 0.5.
- בפינה $(4, 2)$: הניצבים הם 1 ו־2, והשטח הוא 1.
- בפינה $(2, 4)$: הניצבים הם 2 ו־1, והשטח הוא 1.

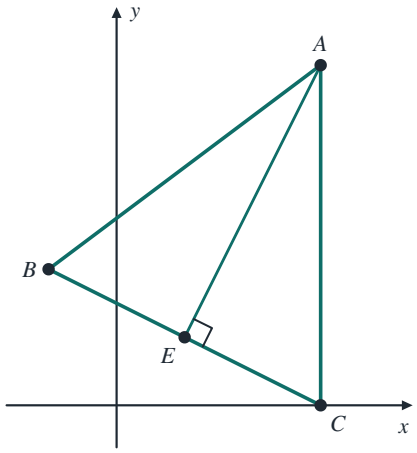
$$S = 4 - 0.5 - 1 - 1 = 1.5$$

תשובה: השטח הוא 1.5.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 4 משולש שווה שוקיים וגובה לבסיס

במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), הקטע AE הוא הגובה לבסיס BC. הקודקוד C נמצא על ציר ה־x. נתון: $A(6, 10)$, $E(2, 2)$.



סרטוט

א. (1) מצאו את השיפוע של AE.
(2) מצאו את משוואת הישר BC.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד B. נמקו.

ד. דרך B מעבירים ישר המקביל ל־AE. הוא חותך את ציר ה־y בנקודה F. מצאו את משוואת הישר BF ואת שיעורי F.

ה. חשבו את שטח המשולש ABC.

מה מתרגלים: ישר מאונך, נקודה על ציר, תכונת הגובה במשולש שווה שוקיים, ישר מקביל, בחירת בסיס חכמה

פתרון מלא

סעיף א

(1) $m = (10 - 2) \div (6 - 2) = 8 \div 4 = 2$.

(2) BC מאונך ל־AE, ולכן שיפועו $-\frac{1}{2}$. הישר עובר דרך $E(2, 2)$:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

תשובה: (1) השיפוע הוא 2. (2) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

סעיף ב

על ציר ה־x מתקיים $y = 0$: $0 = -\frac{1}{2}x + 3$, ולכן $x = 6$.

תשובה: $C(6, 0)$.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ג

במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון, ולכן E היא אמצע BC. מ־C ל־E הקפיצה היא 4− ב־x ו־2+ ב־y. קופצים פעם נוספת:

$$B(2-4,\ 2+2)=B(-2,\ 4)$$

תשובה: $B(-2,\ 4)$.

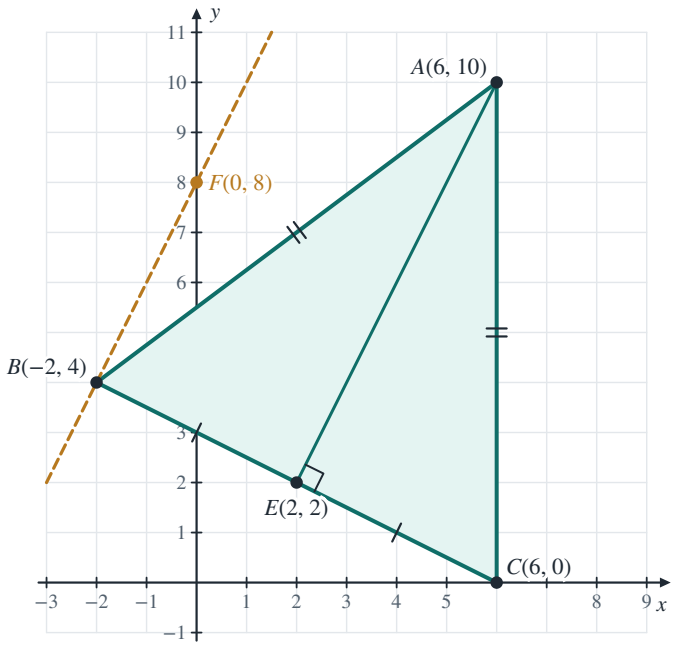
סעיף ד

BF מקביל ל־AE, ולכן שיפועו 2:

$$y-4=2(x+2)$$
$$y=2x+8$$

החיתוך עם ציר ה־y הוא $b=8$.

תשובה: $y=2x+8$, $F(0,\ 8)$.



BF מקביל ל־AE, ו־E היא אמצע הבסיס

סעיף ה

נשים לב שלנקודות A ו־C אותו שיעור $x=6$, ולכן AC מקבילה לציר ה־y. נבחר אותה כבסיס: $AC=10$.
הגובה אליה הוא המרחק האופקי מ־B: $6-(-2)=8$.

$$S=\frac{10\cdot 8}{2}=40$$

בדיקה בדרך הרגילה: $BC=\sqrt{80}$, $AE=\sqrt{80}$, ולכן $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{80}\cdot\sqrt{80}=40$.

תשובה: השטח הוא 40.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 5 מקבילית או מעוין?

נתונה המקבילית ABCD. שלושה מקודקודיה הם $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(6, 6)$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה M, נקודת הפגישה של האלכסונים, ואת שיעורי הקודקוד D.

ב. הראו כי המקבילית היא מעוין.

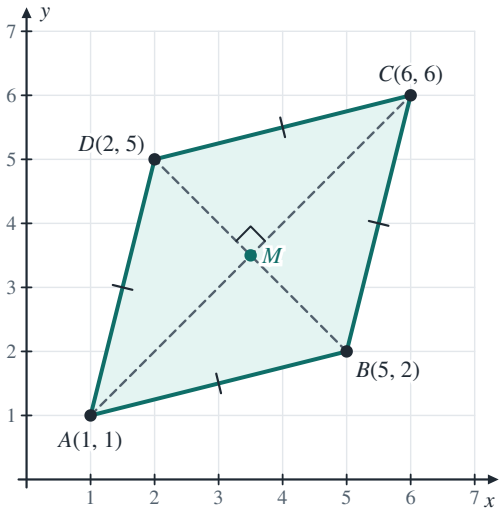
ג. הראו כי האלכסונים מאונכים זה לזה.

ד. חשבו את שטח המעוין.

ה. האם המעוין הוא ריבוע? נמקו.

מה מתרגלים: תכונות מקבילית, קודקוד רביעי, הוכחת מעוין, שטח מעוין, הבחנה בין מעוין לריבוע

פתרון מלא



מעוין: ארבע צלעות שוות ואלכסונים מאונכים

סעיף א

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה, ולכן M היא אמצע AC:

$$M = (\frac{1+6}{2}, \frac{1+6}{2}) = (3.5, 3.5)$$

M היא גם אמצע BD. מ־B ל־M הקפיצה היא x ב־1.5− ו־y ב־1.5+, ולכן $D(3.5 - 1.5, 3.5 + 1.5) = D(2, 5)$.

בדיקה בעזרת הטריק: $D = A + C - B = (1 + 6 - 5, 1 + 6 - 2) = (2, 5)$.

תשובה: $M(3.5, 3.5)$, $D(2, 5)$.

סעיף ב

מקבילית ששתי צלעות סמוכות שלה שוות היא מעוין:

$$AB = \sqrt{(4^2 + 1^2)} = \sqrt{17}$$
$$BC = \sqrt{(1^2 + 4^2)} = \sqrt{17}$$

תשובה: $AB = BC = \sqrt{17}$, ולכן המקבילית היא מעוין.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ג

שיפוע AC הוא $(1-6)\div(1-6)=1$. שיפוע BD הוא $(2-5)\div(5-2)=-1$.

תשובה: המכפלה היא $1\cdot(-1)=-1$, ולכן האלכסונים מאונכים.

סעיף ד

$$AC=\sqrt{(5^2+5^2)}=\sqrt{50}\qquad BD=\sqrt{(3^2+3^2)}=\sqrt{18}$$
$$S=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{900}=15$$

תשובה: השטח הוא 15.

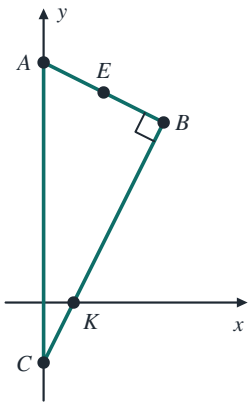
סעיף ה

במעוין שהוא ריבוע האלכסונים שווים, וכאן $\sqrt{18}\neq\sqrt{50}$. אפשר גם לבדוק זווית: שיפוע AB הוא ¼ ושיפוע BC הוא 4, והמכפלה היא 1 ולא 1−.

תשובה: לא. האלכסונים אינם שווים, ולכן זה אינו ריבוע.

תרגיל 6 משולש ישר זווית עם קודקודים על ציר

במשולש ישר זווית ABC ($\angle ABC=90°$) הקודקודים A ו־C נמצאים על ציר ה־y. משוואת הצלע AB היא $y=-\tfrac{1}{2}x+8$. נתון: $C(0,-2)$.



סרטוט

א. מצאו את שיעורי הקודקוד A.

ב. (1) מצאו את משוואת הצלע BC.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ג. הנקודה E היא אמצע הצלע AB. מצאו את שיעוריה.

ד. הנקודה K היא נקודת החיתוך של הצלע BC עם ציר ה־x. מצאו את שיעוריה.

ה. חשבו את שטח המשולש ABC.

ו. חשבו את שטח המשולש EBK.

מה מתרגלים: נקודה על ציר, ישר מאונך, חיתוך, אמצע, שטח עם בסיס על ציר ושטח בעזרת ניצבים

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

A על ציר ה־y, ולכן $x = 0$, ובמשוואת AB מתקבל $y = 8$.

תשובה: $A(0, 8)$.

סעיף ב

(1) BC מאונכת ל־AB, ולכן שיפועה 2. הצלע עוברת דרך $C(0, -2)$, ומשוואתה $y = 2x - 2$.

(2) B היא חיתוך שתי הצלעות:

$$2x - 2 = -\tfrac{1}{2}x + 8$$

$$2.5x = 10$$

$$x = 4$$

מציבים: $y = 2 \cdot 4 - 2 = 6$.

תשובה: (1) $y = 2x - 2$. (2) $B(4, 6)$.

סעיף ג

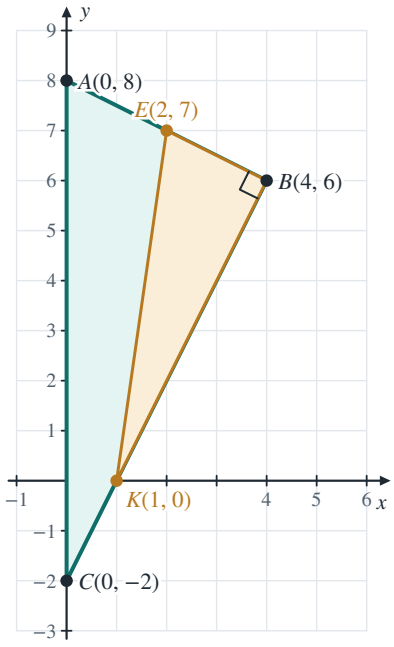
$$E = (\frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}) = (2, 7)$$

תשובה: $E(2, 7)$.

סעיף ד

על ציר ה־x מתקיים $y = 0$: $0 = 2x - 2$, ולכן $x = 1$.

תשובה: $K(1, 0)$.



המשולש ABC והמשולש ישר הזווית EBK שבתוכו

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

נבחר כבסיס את הצלע AC שעל ציר ה־y: $AC = 8 - (-2) = 10$. הגובה אליה הוא שיעור ה־x של B, כלומר 4.

$$S = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$$

תשובה: השטח הוא 20.

סעיף ו

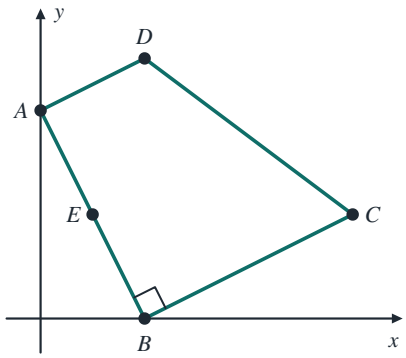
הנקודה E על AB והנקודה K על BC, ולכן הזווית EBK היא הזווית הישרה של המשולש. השטח הוא חצי מכפלת הניצבים:

$$EB = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5} \qquad BK = \sqrt{(3^2 + 6^2)} = \sqrt{45}$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{225} = \tfrac{1}{2} \cdot 15 = 7.5$$

תשובה: השטח הוא 7.5.

תרגיל 7 טרפז ישר זווית והתאמת משוואות

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle ABC = 90°$, $AD \parallel BC$). הנקודה E היא אמצע הצלע AB. נתון: $A(0, 8)$, $E(2, 4)$.



סרטוט

א. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ב. (1) מצאו את שיפוע הצלע AB.
(2) מצאו את משוואת הצלע BC.

ג. שיעור ה־x של הקודקוד C הוא 12. מצאו את שיעור ה־y שלו.

ד. לפניכם ארבע משוואות:

I. $y = \frac{1}{2}x + 8$ II. $y = \frac{1}{2}x + 4$ III. $y = -\frac{3}{4}x + 13$ IV. $y = -\frac{3}{4}x + 10$

אחת מהן מתאימה לישר AD ואחת לישר CD. קבעו איזו משוואה מתאימה לכל ישר. נמקו.

ה. (1) מצאו את שיעורי הקודקוד D.
(2) חשבו את שטח המשולש ECD.
(3) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

מה מתרגלים: קצה שני של קטע, ישר מאונך, התאמת משוואה בעזרת הקבלה והצבה, שטח טרפז

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

מ־A ל־E הקפיצה היא 2+ ב־x ו־4– ב־y. קופצים פעם נוספת מ־E:

תשובה: $B(4,\ 0)$.

סעיף ב

(1) $m = (0 - 8) \div (4 - 0) = -2$.

(2) BC מאונכת ל־AB, ולכן שיפועה ½. הצלע עוברת דרך $B(4,\ 0)$:

$$y - 0 = \tfrac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \tfrac{1}{2}x - 2$$

תשובה: (1) 2–. (2) $y = \tfrac{1}{2}x - 2$.

סעיף ג

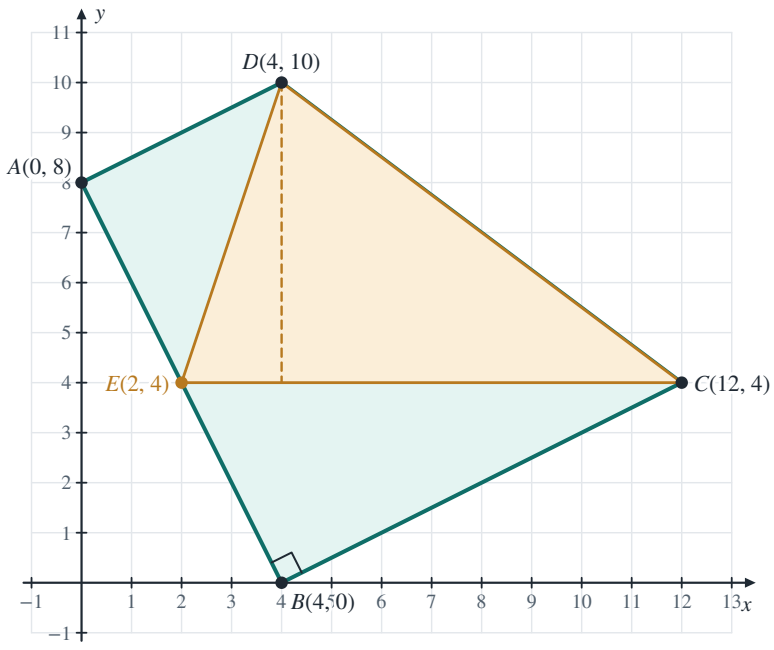
$$y = \tfrac{1}{2} \cdot 12 - 2 = 4$$

תשובה: $C(12,\ 4)$.

סעיף ד

- AD **AD:** מקביל ל־BC, ולכן השיפוע ½, והישר עובר דרך $A(0,\ 8)$, כלומר $b = 8$. זו משוואה I.
- **CD:** שתי המשוואות האחרות בעלות שיפוע ¾–. מציבים $C(12,\ 4)$: במשוואה III מתקבל $-9 + 13 = 4$, כנדרש. במשוואה IV מתקבל $-9 + 10 = 1$, ולא 4.

תשובה: AD מתאים למשוואה I, ו־CD מתאים למשוואה III.



הטרפז ישר הזווית $ABCD$ והמשולש ECD עם בסיס אופקי

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

(1) חיתוך AD ו־CD:

$$\tfrac{1}{2}x + 8 = -\tfrac{3}{4}x + 13$$
$$1.25x = 5$$
$$x = 4$$

מציבים: $y = 2 + 8 = 10$, ולכן $D(4, 10)$.

(2) לנקודות $E(2, 4)$ ו־$C(12, 4)$ אותו שיעור y, ולכן הקטע EC אופקי ואורכו 10. הגובה אליו הוא $10 - 4 = 6$:

$$S = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$$

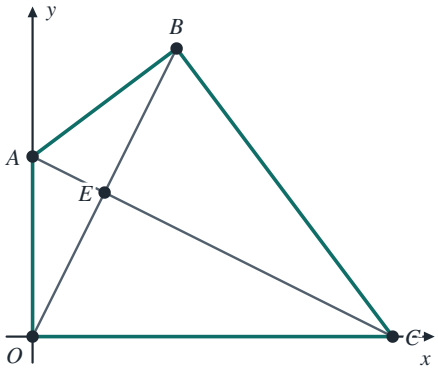
(3) הבסיסים הם AD ו־BC, והגובה הוא השוק הניצבת AB:

$$AB = \sqrt{(4^2 + 8^2)} = \sqrt{80} \qquad BC = \sqrt{(8^2 + 4^2)} = \sqrt{80} \qquad AD = \sqrt{(4^2 + 2^2)} = \sqrt{20}$$
$$S = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{80}}{2} \cdot \sqrt{80} = \frac{\sqrt{1{,}600} + 80}{2} = \frac{40 + 80}{2} = 60$$

תשובה: (1) $D(4, 10)$. (2) 30. (3) 60.

תרגיל 8 מרובע שאלכסוניו מאונכים

במרובע OABC הקודקוד O הוא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על ציר ה־y, והקודקוד C נמצא על ציר ה־x. האלכסון AC מאונך לאלכסון OB. משוואת האלכסון AC היא $y = -\frac{1}{2}x + 10$.



סרטוט

א. מצאו את שיעורי הקודקודים A ו־C.

ב. מצאו את משוואת האלכסון OB.

ג. הנקודה E היא נקודת החיתוך של האלכסונים. מצאו את שיעוריה.

ד. הנקודה E היא אמצע האלכסון OB. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ה. (1) הוכיחו כי המשולש OAB שווה שוקיים.
(2) מצאו את היקף המרובע OABC.

ו. חשבו את שטח המרובע, והסבירו מדוע הוא אינו מעוין.

מה מתרגלים: נקודות על הצירים, אלכסונים מאונכים, אמצע קטע, הוכחת שוויון צלעות, שטח דלתון

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

בהצבת $x = 0$ מתקבל $y = 10$. בהצבת $y = 0$ מתקבל $\frac{1}{2}x = 10$, כלומר $x = 20$.

תשובה: $A(0,\ 10)$, $C(20,\ 0)$.

סעיף ב

OB מאונך ל־AC, ולכן שיפועו 2. הישר עובר דרך הראשית.

תשובה: $y = 2x$.

סעיף ג

$$2x = -\frac{1}{2}x + 10$$

$$2.5x = 10$$

$$x = 4$$

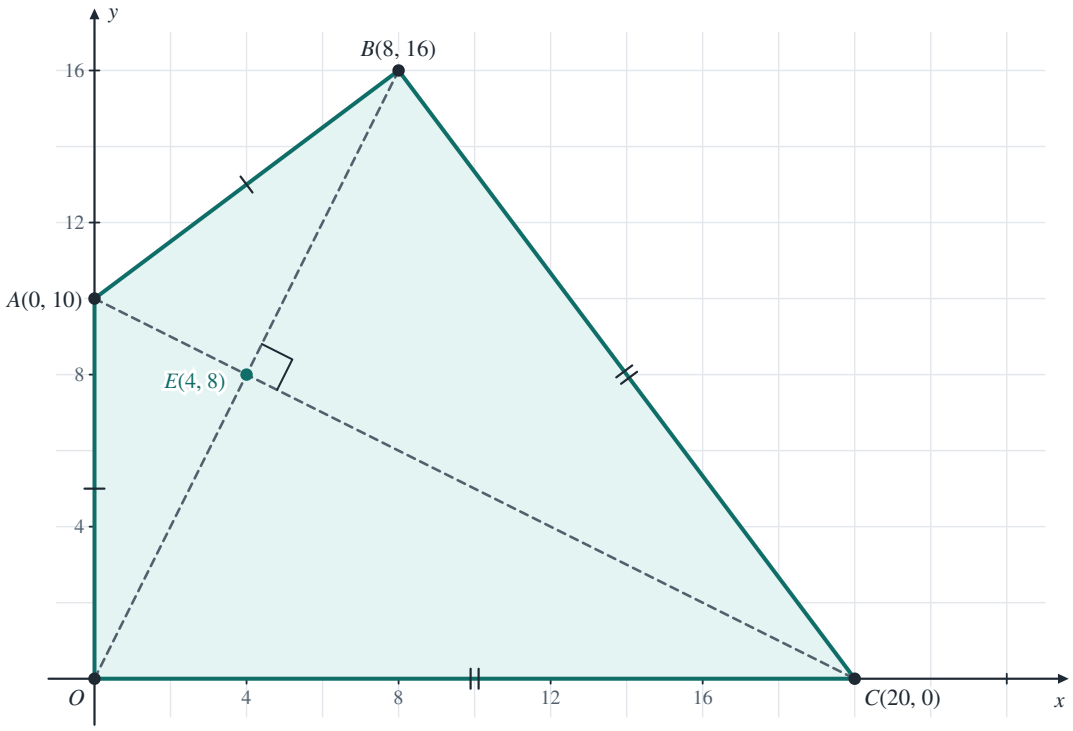
מציבים: $y = 2 \cdot 4 = 8$.

תשובה: $E(4,\ 8)$.

סעיף ד

מ־O ל־E הקפיצה היא $(+4,\ +8)$. קופצים פעם נוספת.

תשובה: $B(8,\ 16)$.



דלתון: שני זוגות של צלעות סמוכות שוות

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

(1) $OA = 10$ (על ציר ה־y), ו־$AB = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = \sqrt{100} = 10$. לכן $OA = AB$.

(2) $OC = 20$, ו־$CB = \sqrt{(12^2 + 16^2)} = \sqrt{400} = 20$. ההיקף הוא $10 + 10 + 20 + 20 = 60$.

תשובה: (1) $OA = AB = 10$, ולכן המשולש שווה שוקיים. (2) ההיקף הוא 60.

סעיף ו

האלכסונים מאונכים, ולכן השטח הוא חצי מכפלתם:

$$AC = \sqrt{(20^2 + 10^2)} = \sqrt{500} \qquad OB = \sqrt{(8^2 + 16^2)} = \sqrt{320}$$

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{320} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{160{,}000} = \tfrac{1}{2} \cdot 400 = 200$$

במעוין כל הצלעות שוות, וכאן $OA = 10$ ו־$OC = 20$. המרובע הוא דלתון: שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

תשובה: השטח הוא 200. המרובע אינו מעוין, כי צלעותיו אינן שוות כולן.

תרגיל 9 גובה לצלע משופעת, ושטח בשתי דרכים

נתון המשולש ABC שקודקודיו $A(6, 10)$, $B(0, 4)$, $C(8, 0)$.

א. מצאו את משוואת הישר BC.

ב. מצאו את משוואת הגובה מהקודקוד A לצלע BC.

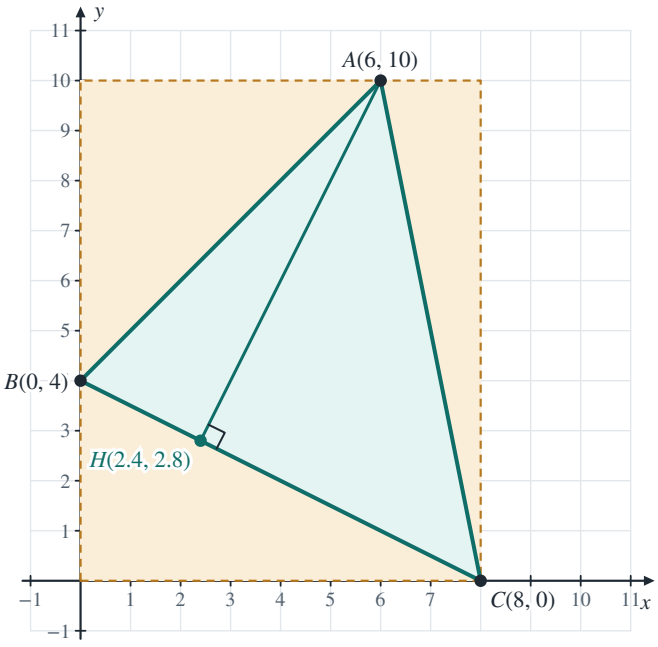
ג. הנקודה H היא חיתוך הגובה עם הצלע BC. מצאו את שיעוריה.

ד. חשבו את אורכי הקטעים AH ו־BC.

ה. חשבו את שטח המשולש בשתי דרכים: בעזרת הבסיס BC והגובה AH, ובעזרת מלבן חוסם.

מה מתרגלים: גובה לצלע משופעת, חיתוך, אורך, השוואה בין שיטות לחישוב שטח

פתרון מלא



הגובה מ־A לצלע המשופעת BC, והמלבן החוסם

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף א

$m = (0-4) \div (8-0) = -½$, והישר חותך את ציר ה־$y$ ב־4.

תשובה: $y = -½x + 4$.

סעיף ב

הגובה מאונך ל־BC, ולכן שיפועו 2. הוא עובר דרך $A(6,\ 10)$:

$$y - 10 = 2(x - 6)$$
$$y = 2x - 2$$

תשובה: $y = 2x - 2$.

סעיף ג

$$2x - 2 = -½x + 4$$
$$2.5x = 6$$
$$x = 2.4$$

מציבים: $y = 2 \cdot 2.4 - 2 = 2.8$.

תשובה: $H(2.4,\ 2.8)$.

סעיף ד

$$AH = \sqrt{(3.6^2 + 7.2^2)} = \sqrt{64.8} \approx 8.05$$
$$BC = \sqrt{(8^2 + 4^2)} = \sqrt{80} \approx 8.94$$

תשובה: $AH = \sqrt{64.8}$, $BC = \sqrt{80}$.

סעיף ה

דרך ראשונה:

$$S = ½ \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{64.8} = ½ \cdot \sqrt{5{,}184} = ½ \cdot 72 = 36$$

דרך שנייה: המלבן החוסם נמשך מ־$x = 0$ עד $x = 8$ ומ־$y = 0$ עד $y = 10$, ושטחו 80. מחסירים את המשולשים שבפינות:

- פינה שמאלית עליונה: ניצבים 6 ו־6, שטח 18.
- פינה ימנית עליונה: ניצבים 2 ו־10, שטח 10.
- פינה שמאלית תחתונה: ניצבים 8 ו־4, שטח 16.

$$S = 80 - 18 - 10 - 16 = 36$$

תשובה: השטח הוא 36 בשתי הדרכים.

תרגיל 10 אנך אמצעי וריבוע: שאלה מסכמת ברמת בגרות

נתונות הנקודות $A(1,\ 5)$ ו־$B(7,\ 1)$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה M, אמצע הקטע AB, ואת שיפוע הקטע AB.

ב. הישר l עובר דרך M ומאונך ל־AB. מצאו את משוואתו.

ג. הישר l חותך את ציר ה־x בנקודה P ואת ציר ה־y בנקודה Q. מצאו את שיעורי הנקודות.

ד. הראו כי $PA = PB$, ובדקו אם גם $QA = QB$.

ה. הנקודה R נמצאת כך ש־M היא אמצע הקטע PR.

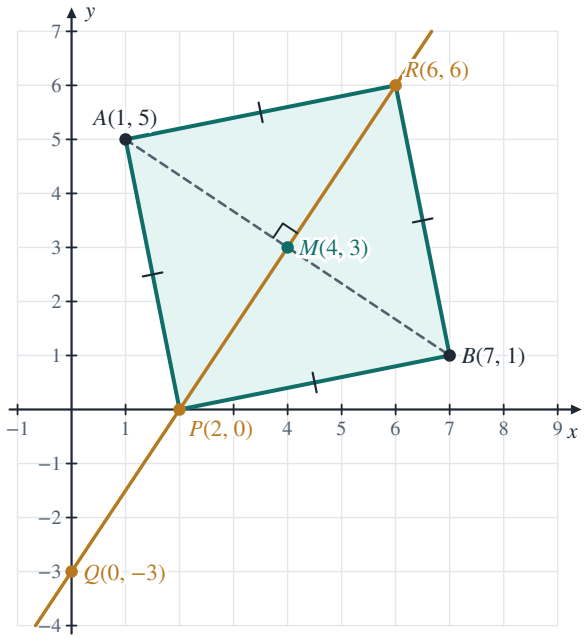
(1) מצאו את שיעורי R.

(2) הוכיחו כי המרובע PARB הוא ריבוע.

(3) חשבו את שטח הריבוע.

מה מתרגלים: שילוב: אמצע, מאונך, חיתוך עם צירים, מרחקים, הוכחת ריבוע בשלבים

פתרון מלא



האנך האמצעי ל־AB, והריבוע $PARB$

סעיף א

$$M = \left(\frac{1+7}{2},\ \frac{5+1}{2}\right) = (4,\ 3) \qquad m = \frac{1-5}{7-1} = \frac{-4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

תשובה: $M(4,\ 3)$, והשיפוע הוא $-\frac{2}{3}$.

סעיף ב

הופכים ומשנים סימן: שיפוע l הוא $1.5 = \frac{3}{2}$.

$$y - 3 = 1.5(x - 4)$$

$$y = 1.5x - 3$$

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: $y = 1.5x - 3$.

סעיף ג

בהצבת $y = 0$ מתקבל $x = 2$, ובהצבת $x = 0$ מתקבל $y = -3$.

תשובה: $P(2, 0)$, $Q(0, -3)$.

סעיף ד

$$PB = \sqrt{(5^2 + 1^2)} = \sqrt{26} \qquad PA = \sqrt{(1^2 + 5^2)} = \sqrt{26}$$
$$QB = \sqrt{(7^2 + 4^2)} = \sqrt{65} \qquad QA = \sqrt{(1^2 + 8^2)} = \sqrt{65}$$

אינטואיציה

זו אינה מקריות. הישר l הוא **האנך האמצעי** של AB, וכל נקודה עליו נמצאת במרחק שווה מ־A ומ־B: המשולשים שנוצרים משני צדי הישר חופפים.

תשובה: $PA = PB = \sqrt{26}$, וגם $QA = QB = \sqrt{65}$.

סעיף ה

(1) מ־P ל־M הקפיצה היא $(+2, +3)$, ולכן $R(6, 6) = R(4 + 2, 3 + 3)$.

(2) נוכיח בשלבים בעזרת האלכסונים AB ו־PR:

- M היא אמצע של שניהם, ולכן המרובע הוא **מקבילית**.
- האלכסונים מאונכים (R ו־P על הישר l), ולכן זו מקבילית עם אלכסונים מאונכים, כלומר **מעוין**.
- $AB = \sqrt{(6^2 + 4^2)} = \sqrt{52}$, ו־$PR = \sqrt{(4^2 + 6^2)} = \sqrt{52}$. האלכסונים שווים, ולכן זה **ריבוע**.

(3) $S = ½ \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{52} = 26$. בדיקה: הצלע היא $PA = \sqrt{26}$, וריבועה 26.

תשובה: (1) $R(6, 6)$. (2) אלכסונים שחוצים זה את זה, מאונכים ושווים, ולכן ריבוע. (3) השטח הוא 26.

© אור בן שטרית · אינסוף

13. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי ותרגול מעורב. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ.

תרגיל מודרך 1 מרחק ואמצע

נתונות הנקודות $A(1,\ 2)$ ו־$B(7,\ 10)$. מצאו את אורך הקטע AB ואת שיעורי נקודת האמצע שלו.

השלימו את הפתרון

ההפרשים: $x_2 - x_1 =$ _____ ו־$y_2 - y_1 =$ _____.

המרחק: $AB = \sqrt{(\text{_____})} = \sqrt{\text{_____}} =$ _____.

נקודת האמצע: $x = (1 + 7) \div 2 =$ _____ ו־$y = (2 + 10) \div 2 =$ _____.

מה מתרגלים: נוסחת המרחק ונוסחת נקודת האמצע

תרגיל מודרך 2 ישר דרך שתי נקודות

מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $A(2,\ 1)$ ו־$B(6,\ 9)$, ואת נקודות החיתוך שלו עם הצירים.

השלימו את הפתרון

השיפוע: $m = (9 - 1) \div (6 - 2) =$ _____.

משוואת הישר: $y - 1 =$ _____ $(x - 2)$, ומכאן $y =$ _____.

חיתוך עם ציר ה־y: מציבים $x = 0$ ומקבלים את הנקודה $(0,$ _____$)$.

חיתוך עם ציר ה־x: מציבים $y = 0$ ומקבלים את הנקודה $($_____$, 0)$.

מה מתרגלים: שיפוע, משוואת ישר, חיתוך עם הצירים

תרגיל מודרך 3 אנך מנקודה לישר

נתון הישר $y = 2x + 1$ והנקודה $P(7,\ 0)$. מהנקודה P מורידים אנך לישר, ו־H היא נקודת החיתוך. מצאו את משוואת האנך, את שיעורי H ואת אורך הקטע PH.

השלימו את הפתרון

השיפוע של האנך: $m \cdot 2 = -1$, ולכן $m =$ _____.

משוואת האנך: $y - 0 =$ _____ $(x - 7)$, ומכאן $y =$ _____.

החיתוך: $2x + 1 =$ _____, ולכן $x =$ _____ ו־$y =$ _____.

המרחק: $PH = \sqrt{(\text{_____})} \approx$ _____.

מה מתרגלים: ישר מאונך, חיתוך ישרים, מרחק

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 1 שיפוע וסדר הנקודות

מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך הנקודות $A(1, 5)$ ו־$B(3, 1)$.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $m = (y_2 - y_1) \div (x_2 - x_1)$

שורה 2 $m = (5 - 1) \div (3 - 1)$

שורה 3 $m = 2$, ולכן הישר עולה.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: אותו סדר במונה ובמכנה

מצאו את הטעות 2 שיפוע של ישר מאונך

מצאו את משוואת הישר המאונך לישר $y = 3x + 1$ ועובר דרך הנקודה $(3, 2)$.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 השיפוע של הישר הנתון הוא 3.

שורה 2 השיפוע של הישר המאונך הוא $\frac{1}{3}$.

שורה 3 $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 3)$

שורה 4 $y = \frac{1}{3}x + 1$

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: תנאי הניצבות

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 3 מרחק בין נקודות

מצאו את המרחק בין הנקודות $A(1,\ 1)$ ו־$B(4,\ 5)$.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 ההפרש בשיעורי ה־x הוא 3, וההפרש בשיעורי ה־y הוא 4.

שורה 2 $d = 3 + 4$

שורה 3 $d = 7$

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: נוסחת המרחק כמשפט פיתגורס

מצאו את הטעות 4 חיתוך עם ציר ה־x

מצאו את נקודת החיתוך של הישר $y = 2x - 6$ עם ציר ה־x.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 על ציר ה־x מתקיים $x = 0$.

שורה 2 $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$

שורה 3 נקודת החיתוך היא $(0,\ -6)$.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: מה מתאפס על כל ציר

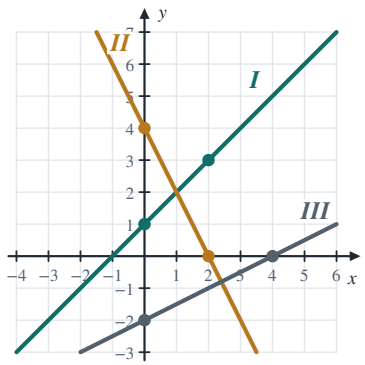
תרגול עצמאי מרחק, שיפוע ומשוואת ישר

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. נתונות הנקודות $A(-2,\ 3)$ ו־$B(4,\ 11)$. מצאו את אורך הקטע AB ואת נקודת האמצע שלו.
2. מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך $A(-1,\ 4)$ ו־$B(3,\ -4)$. האם הישר עולה או יורד?
3. מצאו את משוואת הישר ששיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(2,\ 1)$.
4. מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(-2,\ 1)$ ו־$(4,\ 4)$.
5. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y = -2x + 6$ עם הצירים, ואת שטח המשולש שהישר יוצר עם הצירים.

© אור בן שטרית · אינסוף

6. בסרטוט שלושה ישרים. מצאו את משוואת כל אחד מהם.



7. מצאו את משוואת הישר המקביל לישר $y = 4x - 1$ ועובר דרך הנקודה $(1, 7)$.

8. מצאו את משוואת הישר המאונך לישר $y = \frac{1}{2}x + 3$ ועובר דרך הנקודה $(2, 1)$.

9. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y = x + 1$ ו־$y = -2x + 10$.

10. הנקודות $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ ו־$C(3, 7)$ הן קודקודי משולש. הראו שהצלעות AB ו־BC מאונכות זו לזו, ומצאו את שטח המשולש.

11. הנקודות $A(0, 0)$, $B(5, 1)$ ו־$C(7, 5)$ הן שלושה קודקודים של המקבילית $ABCD$. מצאו את שיעורי הקודקוד D.

12. מצאו את הערכים של k שעבורם המרחק בין $A(1, 1)$ ל־$B(4, k)$ הוא 5.

תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. הנקודות $A(0, 2)$, $B(4, 0)$ ו־$C(7, 6)$ הן שלושה קודקודים של המקבילית $ABCD$. (א) מצאו את שיעורי D. (ב) הראו שהמקבילית היא מלבן. (ג) מצאו את שטח המלבן. (ד) הראו שהאלכסונים שווים באורכם.

14. הישרים $y = 2x + 4$ ו־$y = -x + 7$ נחתכים בנקודה A. הישר הראשון חותך את ציר ה־x בנקודה B, והישר השני חותך אותו בנקודה C. (א) מצאו את A, B ו־C. (ב) מצאו את שטח המשולש ABC. (ג) האם הזווית שבקודקוד A ישרה? נמקו. (ד) מצאו את אורך הצלע AC.

15. על מפה עם מערכת צירים, שבה יחידה אחת מייצגת קילומטר אחד, מסומנים הכפרים $A(1, 7)$ ו־$B(9, 3)$. ציר ה־x מייצג כביש ראשי. רוצים להקים על הכביש תחנה P, באותו מרחק משני הכפרים. (א) מצאו את נקודת האמצע של AB ואת השיפוע של AB. (ב) מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB. (ג) מצאו את שיעורי P. (ד) מהו המרחק מהתחנה לכל כפר?

16. נתונים הישרים $y = (k - 1)x + 2$ ו־$y = 3x - 5$. (א) עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים? (ב) עבור איזה ערך של k הם מאונכים? (ג) עבור $k = 0$ מצאו את נקודת החיתוך של הישרים.

17. הנקודות $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(4, 6)$ ו־$C(8, 0)$ הן קודקודי טרפז. (א) אילו צלעות מקבילות? נמקו. (ב) מצאו את שטח הטרפז. (ג) מצאו את משוואת הישר BC. (ד) E היא נקודת האמצע של BC, ו־F היא נקודת האמצע של OA. הראו ש־EF מקביל לבסיסים, ומצאו את אורכו. (ה) האם הטרפז ישר זווית? נמקו.

© אור בן שטרית · אינסוף

14. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

5. הניצבים של המשולש נמצאים על הצירים.

6. קראו מהסרטוט את נקודת החיתוך עם ציר ה־y, ועוד נקודה אחת על הרשת.

11. האלכסונים של מקבילית חוצים זה את זה.

12. יש שני פתרונות, נקודה אחת מעל A ואחת מתחתיה.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

6 ו־8; $AB = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{100} = 10$; נקודת האמצע $M(4, 6)$.

תרגיל מודרך 2

$m = 2$; $y = 2x - 3$; $(0, -3)$; $(1.5, 0)$.

תרגיל מודרך 3

$m = -½$; $y = -½x + 3.5$; $H(1, 3)$; $PH = \sqrt{(6^2 + 3^2)} = \sqrt{45} \approx 6.71$.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: במונה התחילו מהנקודה B, ובמכנה מהנקודה A. הסדר חייב להיות זהה:
$m = (1 - 5) \div (3 - 1) = -2$, והישר יורד.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: מכפלת השיפועים חייבת להיות -1, ולכן השיפוע הוא $-⅓$. המשוואה הנכונה היא $y = -⅓x + 3$.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: המרחק הוא היתר של משולש ישר זווית, ולא סכום הניצבים: $d = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 1: על ציר ה־x מתקיים $y = 0$. לכן $0 = 2x - 6$, ונקודת החיתוך היא $(3, 0)$. הנקודה $(0, -6)$ היא החיתוך עם ציר ה־y.

תשובות לתרגול העצמאי

1. $AB = 10$, $M(1, 7)$.

2. $m = -2$. הישר יורד.

3. $y = 3x - 5$.

4. $m = ½$, $y = ½x + 2$.

5. $(3, 0)$ ו־$(0, 6)$. השטח הוא $3 \cdot 6 \div 2 = 9$.

6. ישר I: $y = x + 1$. ישר II: $y = -2x + 4$. ישר III: $y = ½x - 2$.

7. $y = 4x + 3$.

8. $m = -2$, $y = -2x + 5$.

9. $(3, 4)$.

10. השיפועים הם ½ ו־-2, ומכפלתם -1.

11. נקודת האמצע של AC היא $(3.5, 2.5)$, ולכן $D(2, 4)$.

12. $(k - 1)^2 + 9 = 25$, ולכן $k = 5$ או $k = -3$.

13. (א) $D(3, 8)$. (ב) השיפועים של AB ו־BC הם ½ ו־-2, ומכפלתם -1. (ג) $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. (ד) $AC = BD = \sqrt{65}$.

14. (א) $A(1, 6)$, $B(-2, 0)$, $C(7, 0)$. (ב) $9 \cdot 6 \div 2 = 27$. (ג) לא: מכפלת השיפועים היא -2. (ד) $\sqrt{72} \approx 8.49$.

15. (א) $M(5, 5)$, $m = -½$. (ב) $y = 2x - 5$. (ג) $P(2.5, 0)$. (ד) $\sqrt{51.25} \approx 7.16$ קילומטרים.

16. (א) $k = 4$. (ב) $3(k - 1) = -1$, ולכן $k = ⅔$. (ג) $(1.75, 0.25)$.

17. (א) AB ו־OC: השיפוע של שתיהן 0. (ב) $36 = 6 \cdot (4 + 8) \div 2$. (ג) $y = -1.5x + 12$. (ד) $E(6, 3)$, $F(0, 3)$. הקטע מאוזן, ואורכו 6. (ה) כן: OA על ציר ה־y, ו־OC על ציר ה־x.

© אור בן שטרית · אינסוף

15. דף סיכום

נוסחאות בסיס

$$d = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ישרים מקבילים: $m_1 = m_2$. ישרים מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

ישרים מיוחדים

- מקביל לציר ה־x: $y = k$, שיפוע 0.
- מקביל לציר ה־y: $x = k$, אין שיפוע.
- עובר בראשית: $y = mx$.

טריקים

- קצה שני: $B = 2M - A$.
- קודקוד רביעי במקבילית: $D = A + C - B$.
- שיפוע מאונך: הופכים ומשנים סימן.
- שורשים: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(ab)}$, ומעגלים רק בסוף.

מהמילים לפעולה

- **על ציר ה־x:** $y = 0$. **על ציר ה־y:** $x = 0$.
- **אמצע:** ממוצע השיעורים.
- **זווית ישרה:** מכפלת שיפועים -1.
- **חיתוך:** משווים ביטויים, ומציבים חזרה.
- **שווה שוקיים:** מחשבים שתי צלעות.
- **התאמת משוואה:** שיפוע, ואז הצבת נקודה.

שטח: סדר הבחירה

1. צלע על ציר או מקבילה לציר.
2. זווית ישרה: חצי מכפלת הניצבים.
3. אלכסונים מאונכים: חצי מכפלתם.
4. גובה לצלע משופעת: משוואה, חיתוך, אורך.
5. מלבן חוסם או פירוק.

מתכון לשאלה בבחינה

1. מתרגמים כל משפט לשורה אלגברית.
2. כותבים שיעורים על הסרטוט.
3. שואלים: מה הקודקוד הבא, ובעזרת מה?
4. בכל משוואה מציבים נקודה לבדיקה.
5. מסיימים הוכחה במשפט מסקנה.

© אור בן שטרית · אינסוף