אינסוף
מתמטיקה

אשכול חברה ומדע · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35371

הסתברות: מאורעות, עץ וטבלה

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

גלגל מזל, בחירות, רמזור בדרך לעבודה או מזג האוויר מחר: בכולם יש אי־ודאות, ובכולם אפשר לתת לה מספר. **תלמיד** ילמד כאן לתרגם את מילות השאלה לחישוב ולהשתמש בעץ ובטבלה. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2024–2026 ורצף הוראה.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. מהי הסתברות? **3**

3. שני שלבים: מאורעות בלתי תלויים **4**

4. מהמילים לחישוב **5**

5. טבלה: שתי קוביות ושני גלגלים **6**

6. הרכב משתנה ומאורעות תלויים **7**

7. טיפים וטריקים **8**

8. טעויות נפוצות **8**

9. למורה: רצף הוראה מוצע **9**

10. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **10**

תרגיל 1: כדורים בשקית: שלב אחד והרכב משתנה 10

תרגיל 2: שני רמזורים: עץ הסתברויות 11

תרגיל 3: בעיטות עונשין: שלושה שלבים 12

תרגיל 4: מבחן אמריקאי: ניחוש 12

תרגיל 5: שני גלגלי מזל: טבלה 14

תרגיל 6: שתי קוביות: ספירת משבצות 15

תרגיל 7: אוטובוס בשני ימים: שלוש תוצאות 16

תרגיל 8: עטים בקופסה: עם החזרה ושינוי הרכב 17

תרגיל 9: בלי החזרה: מאורעות תלויים 18

תרגיל 10: שאלה ברמת בגרות: גלגל המבצע 19

11. תרגול נוסף **21**

12. תשובות ורמזים **26**

13. דף סיכום **27**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בכל מועד של שאלון 35371 שאלה 2, באשכול חברה ומדע, היא שאלה בהסתברות. בכולן מתואר ניסוי עם כמה תוצאות אפשריות, והוא נערך פעמיים. הסעיפים בנויים כמעט תמיד כך:

1. **הסתברויות של פעם אחת:** קריאה מהנתונים, משלים ל־1, יחס של חלק לשלם.
2. **«בשתי הפעמים»:** מכפלה של שתי הסתברויות.
3. **«אותה תוצאה»:** חיבור של כמה מסלולים.
4. **«בדיוק פעם אחת» או «אחד כך ואחד כך»:** מסלולים בשני הסדרים.
5. **«לפחות פעם אחת»:** בדרך הקצרה, דרך המאורע המשלים.

מועד	הסיפור	התוצאות בכל פעם	מה נשאל
קיץ 2024 א	שני גלגלי מזל	סקטורים לא שווים	אותו מספר, סכום נתון
קיץ 2024 ב	שני מצביעים בבחירות	דיאגרמת עיגול באחוזים	שניהם לאותה מפלגה מסוימת, אותה מפלגה, אחד לזו ואחד לזו
קיץ 2025 א	כרטיסי גירוד	משבצות עם פרס ובלי פרס	פרס, שני פרסים, אחד מכל סוג, לפחות אחד
קיץ 2025 ב	רשימת שירים ושני בוחרים	יחס מתוך רשימה	שניהם, אותו סוג, בדיוק אחד
קיץ 2026 א	גובה הגלים בשני ימים	שלוש רמות, משלים ל־1	שני הימים, אותו סוג, לפחות באחד
קיץ 2026 ב	קלמר עם החזרה	יחס מתוך ספירה	שניים, בדיוק אחד, לפחות אחד, שינוי הרכב והשוואה

מה לומדים מהטבלה

בכל ששת המועדים הניסוי חוזר פעמיים והפעמים אינן תלויות זו בזו, גם כשלא כתוב כך במפורש (החזרה, ימים שונים, אנשים שונים). כל הסעיפים נפתרים בעזרת שתי פעולות בלבד: כפל לאורך מסלול, וחיבור של מסלולים. מי ששולט בטבלת המילים שבקובץ זה מוכן כמעט לכל סעיף.

מה יש בדף הנוסחאות

בדף הנוסחאות מופיעים $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ למאורעות בלתי תלויים, ו־$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ למאורע המשלים. כל השאר נבנה מהם.

© אור בן שטרית · אינסוף

2. מהי הסתברות?

הסתברות של מאורע היא מספר בין 0 ל־1 שאומר עד כמה הוא צפוי לקרות. 0 פירושו מאורע שלא יקרה, ו־1 פירושו מאורע שיקרה בוודאות. אפשר לכתוב הסתברות כשבר, כמספר עשרוני או באחוזים:
$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$.

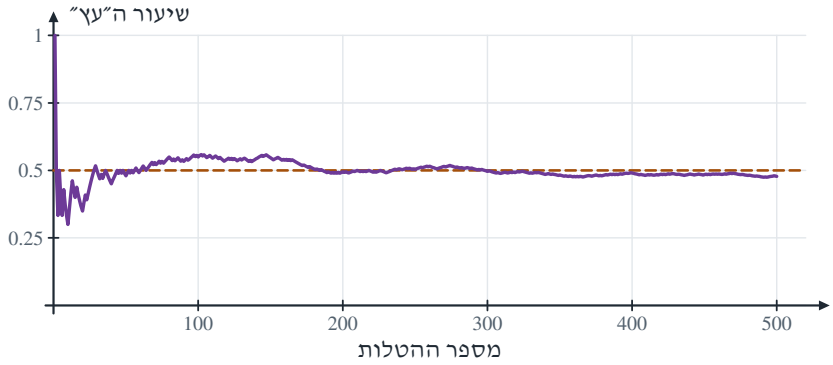
כאשר לכל התוצאות האפשריות יש אותו סיכוי:

$$P(A) = \frac{\text{מספר התוצאות המתאימות}}{\text{מספר כל התוצאות}}$$

לדוגמה, בשקית 20 כדורים, ומהם 8 אדומים. ההסתברות להוציא כדור אדום היא $8 \div 20 = 0.4$.

אינטואיציה: הסתברות היא תדירות לטווח ארוך

הסתברות 0.4 לא אומרת מה יקרה בפעם הבאה. היא אומרת שאם נחזור על הניסוי פעמים רבות, הכדור האדום יצא בערך ב־40% מהפעמים. באיור רואים ריצה מדומה של הטלת מטבע: בהתחלה החלק היחסי של «עץ» קופץ, ובהמשך הוא מתייצב ליד 0.5.



הדמיה אחת: שיעור ה"עץ" מתייצב סביב 0.5

חיבור והמאורע המשלים

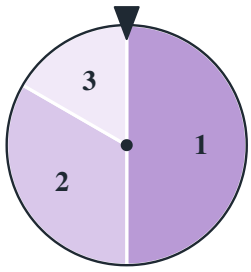
- **מאורעות זרים** הם מאורעות שלא יכולים לקרות יחד. ההסתברות שיקרה אחד מהם היא סכום ההסתברויות: $P(A \text{ או } B) = P(A) + P(B)$.
- **כל התוצאות יחד** מסתכמות ל־1. אם יש כמה תוצאות וחסרה אחת, מוצאים אותה בהשלמה ל־1.
- **המאורע המשלים** של A הוא «A לא קרה». מסמנים אותו ב־$\bar{A}$, ו־$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

נימוק: למה המשלים הוא 1 פחות?

או ש־A קרה או שלא קרה, ואין אפשרות שלישית. שני המאורעות זרים ויחד הם הכול, ולכן $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

© אור בן שטרית · אינסוף

גלגל מזל



סקטורים של 180°, 120° ו־60°

בגלגל, הסתברות של סקטור היא החלק שלו מהעיגול. היא לא תלויה בכמה סקטורים יש:

$$P(1) = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$
$$P(2) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$
$$P(3) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

כך גם בדיאגרמת עיגול של בחירות: מי שנבחר באקראי מצביע למפלגה בהסתברות ששווה לחלקה.

טעות נפוצה

בגלגל בעל שלושה סקטורים לא שווים, ההסתברות של כל סקטור אינה $1 \div 3$. אפשר לספור תוצאות ולחלק רק אם לכולן אותו סיכוי.

3. שני שלבים: מאורעות בלתי תלויים

שני מאורעות הם **בלתי תלויים** אם התוצאה של האחד אינה משנה את ההסתברות של האחר: שתי הטלות של קובייה, הוצאה עם החזרה, ימים שונים, אנשים שונים שאינם מכירים זה את זה. במקרה כזה:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

הסימן $A \cap B$ פירושו ששני המאורעות קרו, כלומר «A וגם B».

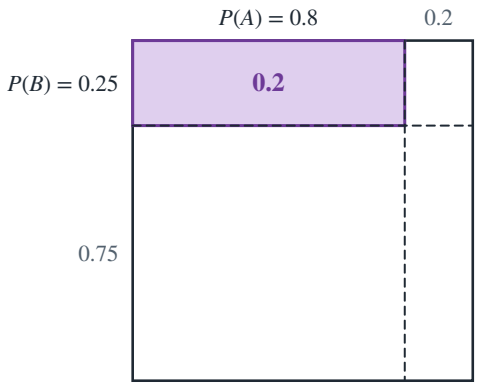
דוגמה

ליאור נוסעת בשני אוטובוסים. ההסתברות שהראשון יגיע בזמן (A) היא 0.8, וההסתברות שהשני יגיע בזמן (B) היא 0.25. האוטובוסים אינם תלויים זה בזה. ההסתברות ששניהם יגיעו בזמן היא $0.8 \cdot 0.25 = 0.2$.

נימוק: למה כופלים?

חשבו על 100 ימים. ב־80 מהם האוטובוס הראשון מגיע בזמן. מתוך 80 הימים האלה, רק ברבע גם האוטובוס השני מגיע בזמן, כלומר ב־20 ימים. $20 \div 100 = 0.2$. לקחת חלק מתוך חלק זה לכפול.

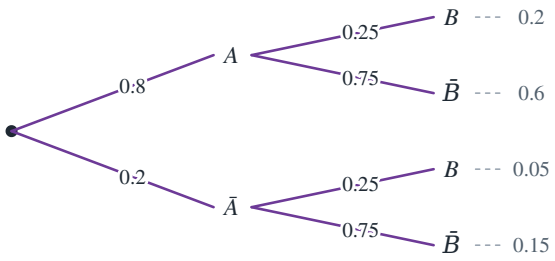
באיור כל הריבוע הוא 1, והשטח הכהה הוא «רבע מתוך 80%».



השטח הצבוע הוא $P(A \cap B)$

© אור בן שטרית · אינסוף

עץ הסתברויות



לאורך מסלול כופלים; סכום ארבע התוצאות הוא 1

הכלל	למה
לאורך מסלול כופלים	מסלול הוא «קרה זה, ואחר כך קרה זה».
בין מסלולים מחברים	שני מסלולים שונים לא יכולים לקרות יחד, ולכן הם זרים.
סכום כל המסלולים הוא 1	העץ מתאר את כל האפשרויות. זו גם בדיקה מצוינת.

לדוגמה, ההסתברות שבדיוק אוטובוס אחד יגיע בזמן היא סכום שני מסלולים:
$0.8 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.6 + 0.05 = 0.65$.

אינטואיציה

למטבע ולקובייה אין זיכרון. אם יצא «עץ» חמש פעמים, ההסתברות ל«עץ» בפעם השישית עדיין $\frac{1}{2}$.

התחושה ש«עכשיו מגיע פלי» היא טעות מוכרת, שנקראת כשל המהמר.

למורה

כדאי לשאול את הכיתה «כמה עץ נצפה ב־10 הטלות? האם 5 בדיוק?», ולערוך ניסוי אמיתי של הטלות בקבוצות. כשמחברים את התוצאות של כל הקבוצות, החלק היחסי מתקרב ל־0.5, והתלמידים רואים את ההבדל בין תוצאה בודדת לתדירות לטווח ארוך.

4. מהמילים לחישוב

זה לב הנושא. כל סעיף בבחינה מתחיל במילה אחת, והיא קובעת כמה מסלולים לוקחים. נניח שבכל יום, ובלי תלות בימים אחרים, האוטובוס מגיע בזמן בהסתברות 0.7, מאחר בהסתברות 0.2 ומקדים בהסתברות 0.1. מסתכלים על שני ימים:

מילות השאלה	מה עושים	החישוב
«בשני הימים האוטובוס יגיע בזמן»	מסלול אחד, כפל	$0.7 \cdot 0.7 = 0.49$
«בשני הימים אותה תוצאה»	סכום המסלולים של שתי תוצאות זהות	$0.7^2 + 0.2^2 + 0.1^2 = 0.54$
«בשני הימים תוצאות שונות»	המשלים של «אותה תוצאה»	$1 - 0.54 = 0.46$
«ביום אחד מאחר וביום אחד מקדים»	שני מסלולים: שני הסדרים	$2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.04$
«בדיוק ביום אחד יאחר»	שני מסלולים: מאחר ולא מאחר, ולא מאחר ומאחר	$2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.32$

© אור בן שטרית · אינסוף

מילות השאלה	מה עושים	החישוב
«לפחות ביום אחד יאחר»	המשלים של «בשני הימים לא יאחר»	$1 - 0.8^2 = 0.36$
«בשום יום לא יאחר»	מסלול אחד, כפל	$0.8 \cdot 0.8 = 0.64$

נימוק: למה כופלים ב־2 ב«בדיוק פעם אחת»?

יש שני סדרים שונים: איחור ביום הראשון בלבד, או איחור ביום השני בלבד. אלה שני מסלולים שונים בעץ. לכל אחד מהם אותה הסתברות, $0.8 \cdot 0.2$, ולכן מחברים אותם.

טיפ: «לפחות» הוא המשלים של «אף פעם»

«לפחות פעם אחת» כולל כמה מסלולים, ו«אף פעם» הוא מסלול יחיד. לכן נוח יותר לחשב $P(\text{אף פעם}) = 1 - P(\text{לפחות פעם אחת})$. בשלושה שלבים החיסכון גדול עוד יותר: «לפחות פעם אחת» הוא 7 מסלולים, ו«אף פעם» הוא מסלול אחד.

טעות נפוצה

«לפחות באחד» אינו $0.2 + 0.2 = 0.4$. חיבור מותר רק למאורעות זרים, ואילו איחור ביום הראשון ואיחור ביום השני יכולים לקרות יחד. ועם הסתברויות גדולות, חיבור כזה נותן אפילו תוצאה גדולה מ־1, וזו דרך מהירה לגלות את הטעות.

5. טבלה: שתי קוביות ושני גלגלים

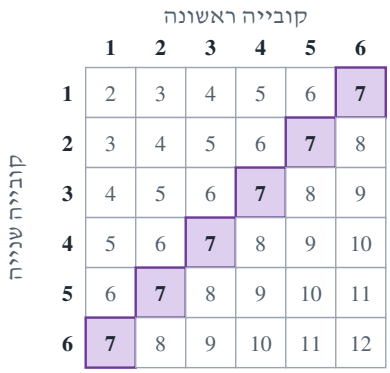
כשיש הרבה צירופים, או כשהשאלה עוסקת בסכום, טבלה נוחה יותר מעץ.

כל הצירופים שווי סיכוי

בהטלת שתי קוביות יש $6 \cdot 6 = 36$ תוצאות שוות סיכוי. בכל משבצת כתוב סכום שתי הקוביות. סופרים משבצות מתאימות:

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

הסכום 7 הוא הסכום הסביר ביותר, כי הוא נמצא על האלכסון הארוך. הסכום 2 מתקבל רק בדרך אחת, ולכן $P(2) = 1 \div 36$.



כל 36 התוצאות. צבוע: סכום 7

הצירופים אינם שווי סיכוי

בגלגלים בעלי סקטורים לא שווים לא סופרים משבצות. רושמים בכל משבצת את מכפלת ההסתברויות, ומחברים את המשבצות המתאימות. לדוגמה, בגלגל ראשון ההסתברויות למספרים 1 ו־2 הן 0.6 ו־0.4, ובגלגל שני הן 0.3 ו־0.7:

גלגל ראשון ↓, גלגל שני →	1 (0.3)	2 (0.7)
1 (0.6)	2 סכום, 0.18	3 סכום, 0.42
2 (0.4)	3 סכום, 0.12	4 סכום, 0.28

© אור בן שטרית · אינסוף

ההסתברות שהסכום יהיה 3 היא $0.12 + 0.42 = 0.54$. בדיקה: סכום כל המשבצות הוא 1.

למורה

כדאי לתת לתלמידים לנחש לפני החישוב: «בשתי קוביות, מה סביר יותר, סכום 7 או סכום 12?» הניחוש של רבים הוא שאין הבדל. בניית הטבלה בכיתה מיישבת את הפער בין התחושה לבין המספרים.

6. הרכב משתנה ומאורעות תלויים

שינוי הרכב

בשאלות עם ספירה, כמו כדורים בשקית, מוסיפים לפעמים פריטים ושואלים מה קרה להסתברות. כדאי לזכור שגם המכנה משתנה. לדוגמה, בשקית 6 כדורים אדומים ו־18 כדורים כחולים. ההסתברות לכדור אדום היא $6 \div 24 = 0.25$. אם מוסיפים 6 כדורים אדומים, היא הופכת ל־$12 \div 30 = 0.4$, ולא ל־$12 \div 24$.

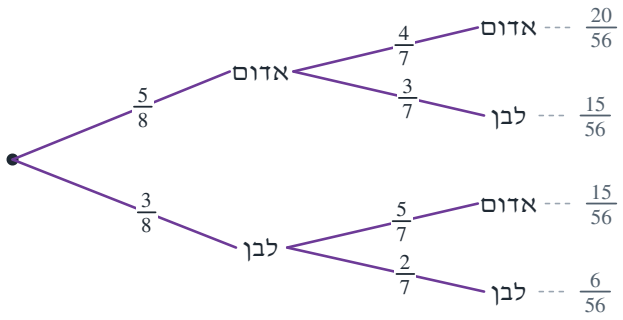
אם רוצים להגיע להסתברות נתונה, מסמנים ב־n את מספר הכדורים שמוסיפים ופותרים משוואה:

$$\frac{6+n}{24+n} = 0.4 \quad \rightarrow \quad 6+n = 9.6+0.4n \quad \rightarrow \quad 0.6n = 3.6 \quad \rightarrow \quad n = 6$$

מאורעות תלויים: בלי החזרה

אם מוציאים כדור ולא מחזירים אותו, השקית השתנתה, וההסתברות בשלב השני תלויה במה שקרה בשלב הראשון. תוכנית הלימודים עוסקת בזה ברמה אינטואיטיבית, עד שני מאורעות. העץ נשאר אותו עץ, אבל ההסתברויות בענפים השונים של השלב השני שונות.

לדוגמה, בשקית 5 כדורים אדומים ו־3 כדורים לבנים, ומוציאים שני כדורים בלי החזרה:



בלי החזרה: השלב השני תלוי בראשון

אחרי שיצא כדור אדום נשארו 7 כדורים, ומהם 4 אדומים. לכן ההסתברות לכדור אדום שני היא $\frac{4}{7}$, ולא $\frac{5}{8}$.

$$P(\text{אדום} \cap \text{אדום}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

איך מזהים?	בלתי תלויים	תלויים
השאלה שצריך לשאול: «האם השלב הראשון משנה את הסיכויים בשלב השני?»	לא. למשל, עם החזרה, בימים שונים, אצל אנשים שאינם קשורים.	כן. למשל, בלי החזרה, או כשהסתברות האיחור תלויה בכך שירד גשם.

© אור בן שטרית · אינסוף

בבגרות

בשאלונים של השנים 2024–2026 לא הופיעו מאורעות תלויים. אם מופיע בשאלה «עם החזרה» או מתוארים שני ימים או שני אנשים, הפעמים בלתי תלויות. קראו בזהירות: הביטוי «בלי החזרה» משנה את כל העץ.

7. טיפים וטריקים

1. **סרטטו עץ של שני שלבים:** גם אם השאלה נראית פשוטה. הוא לוקח חצי דקה ומונע שכחה של מסלול.
2. **בדיקת 1:** סכום כל המסלולים חייב להיות 1. הסתברות גדולה מ־1 היא תמיד טעות.
3. **הדגישו את המילה הקובעת:** «בשניהם», «אותו», «בדיוק», «לפחות», «אף אחד». כל אחת היא מתכון אחר.
4. **«לפחות» דרך המשלים:** $1 - P(\text{אף פעם})$ כמעט תמיד מהיר יותר.
5. **«בדיוק אחד» עם 2:** אל תשכחו את שני הסדרים.
6. **«אותה תוצאה» היא סכום של ריבועים:** כשאותו ניסוי נערך פעמיים, $p_1^2 + p_2^2 + \dots$
7. **שבר, עשרוני או אחוז:** עבדו באותה צורה לאורך כל השאלה. בדרך כלל עשרוני נוח במחשבון, ושבר מדויק יותר כשיש שליש.
8. **בלי עיגול באמצע:** $\frac{1}{3}$ הוא לא 0.33. אם יש שברים לא נוחים, עבדו בשברים עד הסוף.
9. **תרגום לכמות:** הסתברות 0.18 פירושה שמתוך 200 פעמים נצפה לכ־36. זו דרך טובה לבדוק סבירות.
10. **«איזה מהם סביר יותר?»:** מחשבים את שתי ההסתברויות באותה צורה, ומשווים. כותבים מסקנה במילים.

8. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
«לפחות אחד» כסכום של שתי ההסתברויות	«או» נשמע כמו חיבור	אלה לא מאורעות זרים. מחשבים $1 - P(\text{אף אחד})$.
«בדיוק אחד» בלי הכפלה ב־2	חושבים על סדר אחד בלבד	יש שני מסלולים, ומחברים אותם.
«אותה תוצאה» רק עבור תוצאה אחת	שוכחים שיש כמה תוצאות אפשריות	מחברים את כל המסלולים של תוצאות זהות.
חיבור במקום כפל ב«שניהם»	המילה «וגם» נשמעת כהוספה	«שניהם» הוא חלק מתוך חלק: כופלים.
מספר הסקטורים במקום גודלם	רגילים לתוצאות שוות סיכוי	לפי הזווית או האחוז של הסקטור.
אחרי הוספת כדורים לא משנים את המכנה	מעדכנים רק את המונה	גם מספר הכדורים הכולל גדל.
בלי החזרה עם אותן הסתברויות בשלב השני	מעתיקים את העץ של «עם החזרה»	בשלב השני נשאר פריט אחד פחות.
תוצאה גדולה מ־1 או שלילית	טעות בחישוב שלא נבדקה	הסתברות היא תמיד בין 0 ל־1.
בלבול בין אחוזים לעשרוני: $35 \cdot 45$	מעתיקים את המספרים כפי שהם	$0.35 \cdot 0.45 = 0.1575$, כלומר 15.75%.

© אור בן שטרית · אינסוף

הטעות	למה היא קורה	התיקון
«אחרי הרבה פעמים עץ, מגיע פלי»	תחושה שהמזל צריך להתאזן	בפעמים בלתי תלויות, ההסתברות לא משתנה.

9. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים קובעת 40 שעות לכל אשכול ואינה מחלקת אותן בין הנושאים, ולכן מספרי השעות בטבלה הם הצעה בלבד. התוכנית עוסקת בעד שלושה מאורעות בלתי תלויים או שני מאורעות תלויים, והתלות נבחנת באופן אינטואיטיבי.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
משמעות ההסתברות	1	הסתברות כתדירות לטווח ארוך, ניסוי בכיתה	«מה אומר שההסתברות לגשם היא 30%?»
שלב אחד	1.5	חלק מתוך שלם, גלגל, משלים, חיבור של זרים	«למה בגלגל הזה הסתברות כל סקטור אינה שליש?»
שני שלבים	2	כפל, מודל שטח, עץ	«מתוך 100 ימים, בכמה יקרו שני הדברים?»
מהמילים לחישוב	2.5	«אותו», «בדיוק», «לפחות», «אף פעם»	«כמה מסלולים בעץ מתאימים למשפט הזה?»
טבלה	1	קוביות, גלגלים, סכומים	«מה סביר יותר: סכום 7 או סכום 12?»
הרכב ותלות	1.5	שינוי הרכב, בלי החזרה	«מה השתנה בשקית אחרי השלב הראשון?»
שאלה מלאה	1	שאלת בגרות מתחילתה ועד סופה	«לפני שמחשבים: איזו מילה קובעת בכל סעיף?»

למורה: שאלת סיום קצרה לאבחון

בקשו מהתלמידים להתאים ארבעה משפטים לארבעה ביטויים: 0.6^2, $2 \cdot 0.6 \cdot 0.4$, $1 - 0.4^2$, $0.6^2 + 0.4^2$. המשפטים: «הצלחה בשתי הפעמים», «הצלחה בדיוק פעם אחת», «הצלחה לפחות פעם אחת», «אותה תוצאה בשתי הפעמים». כך רואים מהר מי הבין את המילים ומי רק מחשב.

© אור בן שטרית · אינסוף

10. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. כל הנתונים בדיוניים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 כדורים בשקית: שלב אחד והרכב משתנה

בשקית יש 20 כדורים: 8 אדומים, 5 כחולים ו־7 ירוקים. מוציאים כדור אחד באקראי.

א. מהי ההסתברות שהכדור אדום?

ב. מהי ההסתברות שהכדור אינו כחול?

ג. מהי ההסתברות שהכדור אדום או ירוק?

ד. מוסיפים לשקית 5 כדורים כחולים. מהן עכשיו ההסתברויות להוצאת כדור כחול ולהוצאת כדור אדום?

מה מתרגלים: חלק מתוך שלם, משלים, חיבור של מאורעות זרים, שינוי במכנה

פתרון מלא

סעיף א

$$P(\text{אדום}) = \frac{8}{20} = 0.4$$

תשובה: 0.4.

סעיף ב

זה המאורע המשלים של «כחול»:

$$1 - \frac{5}{20} = 1 - 0.25 = 0.75$$

תשובה: 0.75.

סעיף ג

«אדום» ו«ירוק» הם מאורעות זרים, ולכן מחברים:

$$\frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{15}{20} = 0.75$$

תשובה: 0.75. זה אותו מאורע כמו בסעיף ב, כי «לא כחול» פירושו «אדום או ירוק».

סעיף ד

עכשיו יש 25 כדורים, ומהם 10 כחולים ו־8 אדומים:

$$\frac{10}{25} = 0.4 \qquad \frac{8}{25} = 0.32$$

תשובה: כחול: 0.4. אדום: 0.32. ההסתברות לכדור אדום קטנה, אף שמספר הכדורים האדומים לא השתנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 2 שני רמזורים: עץ הסתברויות

בדרך לעבודה עובר דור בשני רמזורים שאינם תלויים זה בזה. ההסתברות שהרמזור הראשון אדום היא 0.6, וההסתברות שהרמזור השני אדום היא 0.3.

א. מהי ההסתברות ששני הרמזורים אדומים?

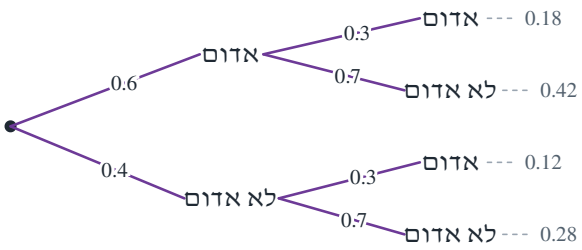
ב. מהי ההסתברות ששני הרמזורים אינם אדומים?

ג. מהי ההסתברות שבדיוק רמזור אחד אדום?

ד. מהי ההסתברות שלפחות רמזור אחד אדום?

מה מתרגלים: עץ של שני שלבים, כפל לאורך מסלול, חיבור בין מסלולים, משלים

פתרון מלא



בכל רמזור: אדום או לא אדום

סעיף א

$$0.6 \cdot 0.3 = 0.18$$

תשובה: 0.18.

סעיף ב

$$0.4 \cdot 0.7 = 0.28$$

תשובה: 0.28.

סעיף ג

שני מסלולים: הראשון אדום והשני לא, או הראשון לא והשני אדום.

$$0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

תשובה: 0.54.

סעיף ד

זה המאורע המשלים של סעיף ב:

$$1 - 0.28 = 0.72$$

תשובה: 0.72. בדיקה: $0.18 + 0.54 = 0.72$.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 3 בעיטות עונשין: שלושה שלבים

ההסתברות ששחקן יבקיע בבעיטת עונשין היא 0.8, והבעיטות אינן תלויות זו בזו. השחקן בועט שתי בעיטות.

א. מהי ההסתברות שיבקיע בשתיהן? ומהי ההסתברות שלא יבקיע באף אחת?

ב. מהי ההסתברות שיבקיע בדיוק פעם אחת?

ג. השחקן בועט בעיטה שלישית. מהי ההסתברות שיבקיע בכל שלוש הבעיטות?

ד. מהי ההסתברות שיבקיע לפחות באחת משלוש הבעיטות?

מה מתרגלים: חזרה על ניסוי, שני סדרים, שלושה מאורעות בלתי תלויים, «לפחות» דרך המשלים

פתרון מלא

סעיף א

$$0.8 \cdot 0.8 = 0.64 \qquad 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

תשובה: 0.64 ו־0.04.

סעיף ב

יש שני סדרים: הבקעה ואחריה החמצה, או החמצה ואחריה הבקעה.

$$2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.32$$

תשובה: 0.32. בדיקה: $0.64 + 0.04 + 0.32 = 1$.

סעיף ג

$$0.8^3 = 0.512$$

תשובה: 0.512.

סעיף ד

המאורע המשלים הוא שלא יבקיע באף בעיטה:

$$1 - 0.2^3 = 1 - 0.008 = 0.992$$

תשובה: 0.992.

תרגיל 4 מבחן אמריקאי: ניחוש

במבחן שלוש שאלות, ולכל שאלה ארבע תשובות, שאחת מהן נכונה. שירה מנחשת באקראי בכל שאלה.

א. מהי ההסתברות לנחש נכון בשאלה אחת?

ב. מהי ההסתברות שתענה נכון על כל השאלות?

ג. מהי ההסתברות שלא תענה נכון על אף שאלה?

ד. מהי ההסתברות שתענה נכון על שאלה אחת לפחות?

ה. מהי ההסתברות שתענה נכון בדיוק על שאלה אחת?

מה מתרגלים: שלושה מאורעות, שברים, ספירת מסלולים

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

תשובה: $\frac{1}{4}$.

סעיף ב

$$(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$$

תשובה: $\frac{1}{64}$, כלומר כ־0.016.

סעיף ג

$$(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$$

תשובה: $\frac{27}{64}$, כלומר כ־0.422.

סעיף ד

$$1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

תשובה: $\frac{37}{64}$, כלומר כ־0.578.

סעיף ה

התשובה הנכונה יכולה להיות בשאלה הראשונה, בשנייה או בשלישית. אלה שלושה מסלולים, וההסתברות של כל אחד מהם היא $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$.

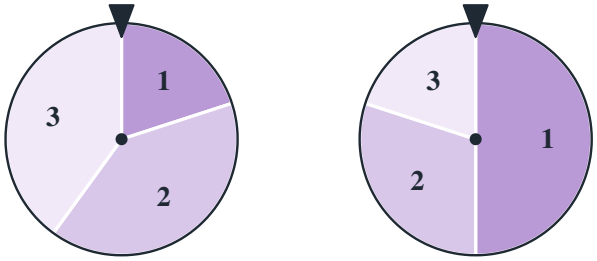
$$3 \cdot \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

תשובה: $\frac{27}{64}$, כלומר כ־0.422.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 5 שני גלגלי מזל: טבלה

במשחק מסובבים שני גלגלים. המספרים על הגלגלים הם 1, 2 ו־3, והסקטורים אינם שווים, כמתואר באיור.



הגלגל הראשון: 50%, 30%, 20% הגלגל השני: 20%, 40%, 40%

א. השלימו טבלה של הסתברויות כל הצירופים.

ב. מהי ההסתברות שיתקבל אותו מספר בשני הגלגלים?

ג. מהי ההסתברות שסכום המספרים יהיה 4?

ד. מהי ההסתברות שסכום המספרים יהיה 5 לפחות?

מה מתרגלים: גלגל עם סקטורים לא שווים, טבלת צירופים, אותו מספר, סכום נתון

פתרון מלא

סעיף א

כל משבצת היא מכפלה של הסתברות בגלגל הראשון בהסתברות בגלגל השני.

גלגל א ↓, גלגל ב ←	1 (0.2)	2 (0.4)	3 (0.4)
1 (0.5)	0.10	0.20	0.20
2 (0.3)	0.06	0.12	0.12
3 (0.2)	0.04	0.08	0.08

תשובה: הטבלה מלאה, וסכום המשבצות הוא 1.

סעיף ב

מחברים את האלכסון, כלומר את הצירופים $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$:

$$0.10 + 0.12 + 0.08 = 0.30$$

תשובה: 0.3.

סעיף ג

הצירופים הם $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$:

$$0.20 + 0.12 + 0.04 = 0.36$$

תשובה: 0.36.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

הצירופים הם $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,3)$:

$$0.12 + 0.08 + 0.08 = 0.28$$

תשובה: 0.28.

תרגיל 6 שתי קוביות: ספירת משבצות

מטילים שתי קוביות הוגנות.

א. מהי ההסתברות שיתקבל אותו מספר בשתי הקוביות?

ב. מהי ההסתברות שסכום המספרים יהיה 10 לפחות?

ג. מהי ההסתברות שיתקבל 6 בקובייה אחת לפחות?

ד. עומר אומר: "סכום 7 סביר פי 2 מסכום 4". האם הוא צודק? נמקו.

מה מתרגלים: טבלה של 36 תוצאות, ספירה, משלים, השוואת הסתברויות

פתרון מלא

קובייה ראשונה

קובייה שנייה	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	**11**
6	7	8	9	**10**	**11**	**12**

צבוע: סכום של 10 לפחות

סעיף א

יש 6 משבצות על האלכסון הראשי: $(1,1)$ עד $(6,6)$.

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

תשובה: $\frac{1}{6}$.

סעיף ב

סכום 10: 3 משבצות. סכום 11: 2 משבצות. סכום 12: משבצת אחת. בסך הכול 6 משבצות.

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

תשובה: $\frac{1}{6}$.

סעיף ג

המאורע המשלים הוא שבשתי הקוביות לא יתקבל 6:

© אור בן שטרית · אינסוף

$$1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$$

תשובה: $\frac{11}{36}$.

סעיף ד

לסכום 7 יש 6 משבצות, ולסכום 4 יש 3 משבצות: $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$.

תשובה: כן. $\frac{6}{36}$ גדול פי 2 מ־$\frac{3}{36}$.

תרגיל 7 אוטובוס בשני ימים: שלוש תוצאות

בכל בוקר, ובלי תלות בימים אחרים, אוטובוס מגיע בזמן בהסתברות 0.65, מאחר בהסתברות 0.25, ואחרת הוא מקדים. נועה מסתכלת על יומיים.

א. מהי ההסתברות שהאוטובוס יקדים ביום מסוים?

ב. מהי ההסתברות שהאוטובוס יגיע בזמן בשני הימים?

ג. מהי ההסתברות שבשני הימים תהיה אותה תוצאה?

ד. מהי ההסתברות שביום אחד האוטובוס יאחר וביום האחר הוא יקדים?

ה. נועה מאחרת לעבודה רק אם האוטובוס מאחר. מהי ההסתברות שתאחר לפחות באחד משני הימים?

מה מתרגלים: השלמה ל־1, «אותה תוצאה», שני סדרים, «לפחות» דרך המשלים

פתרון מלא

סעיף א

$$1-0.65-0.25=0.1$$

תשובה: 0.1.

סעיף ב

$$0.65^2=0.4225$$

תשובה: 0.4225.

סעיף ג

שלושה מסלולים: בזמן ובזמן, מאחר ומאחר, מקדים ומקדים.

$$0.65^2+0.25^2+0.1^2=0.4225+0.0625+0.01=0.495$$

תשובה: 0.495.

סעיף ד

שני סדרים:

$$2\cdot0.25\cdot0.1=0.05$$

תשובה: 0.05.

סעיף ה

ההסתברות שלא תאחר ביום מסוים היא $1-0.25=0.75$. המאורע המשלים הוא שלא תאחר בשני הימים:

$$1-0.75^2=1-0.5625=0.4375$$

תשובה: 0.4375.

תרגיל 8 עטים בקופסה: עם החזרה ושינוי הרכב

בקופסה 12 עטים כחולים ו־8 עטים אדומים. מוציאים עט באקראי, מחזירים אותו, ומוציאים עט נוסף.

א. מהי ההסתברות שיצאו שני עטים כחולים?

ב. מהי ההסתברות שיצא בדיוק עט כחול אחד?

ג. מהי ההסתברות שיצא לפחות עט אדום אחד?

ד. מוסיפים לקופסה 5 עטים אדומים. האם ההסתברות שיצאו שני עטים כחולים גדלה או קטנה? נמקו בחישוב.

ה. בקופסה המקורית, כמה עטים אדומים צריך להוסיף כדי שההסתברות להוציא בפעם אחת עט כחול תהיה $\frac{1}{2}$?

מה מתרגלים: בלתי תלויים בגלל ההחזרה, שני סדרים, שינוי הרכב, השוואה, הפוך מהסתברות לכמות

פתרון מלא

בקופסה 20 עטים, ולכן $P(\text{כחול})=0.6$ ו־$P(\text{אדום})=0.4$. בגלל ההחזרה, ההוצאות בלתי תלויות.

סעיף א

$$0.6\cdot 0.6=0.36$$

תשובה: 0.36.

סעיף ב

$$2\cdot 0.6\cdot 0.4=0.48$$

תשובה: 0.48.

סעיף ג

המאורע המשלים הוא שיצאו שני עטים כחולים:

$$1-0.36=0.64$$

תשובה: 0.64.

סעיף ד

עכשיו יש 25 עטים, ומהם 12 כחולים:

$$\left(\frac{12}{25}\right)^2=0.48^2=0.2304$$

תשובה: ההסתברות קטנה, מ־0.36 ל־0.2304.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ה

כדי שההסתברות תהיה $\frac{1}{2}$, מספר העטים האדומים צריך להיות שווה למספר הכחולים, כלומר 12. בקופסה יש 8.

תשובה: צריך להוסיף 4 עטים אדומים. בדיקה: $12 \div 24 = 0.5$.

תרגיל 9 בלי החזרה: מאורעות תלויים

בשקית 5 כדורים אדומים ו־3 כדורים לבנים. מוציאים שני כדורים זה אחר זה, בלי להחזיר את הראשון.

א. הסבירו מדוע ההוצאה השנייה תלויה בראשונה.

ב. מהי ההסתברות ששני הכדורים אדומים?

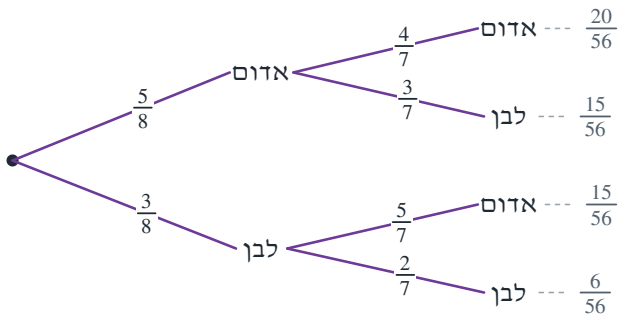
ג. מהי ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ד. מהי ההסתברות שהכדורים בצבעים שונים?

ה. אילו היו מחזירים את הכדור הראשון, האם ההסתברות לשני כדורים אדומים הייתה גדולה יותר או קטנה יותר? נמקו.

מה מתרגלים: זיהוי תלות, עץ בלי החזרה, «אותו צבע», השוואה לניסוי עם החזרה

פתרון מלא



בלי החזרה: השלב השני תלוי בראשון

סעיף א

אחרי ההוצאה הראשונה הרכב השקית משתנה. אם יצא כדור אדום, נשארים 4 כדורים אדומים מתוך 7. אם יצא כדור לבן, נשארים 5 כדורים אדומים מתוך 7.

תשובה: ההסתברות בהוצאה השנייה משתנה לפי תוצאת ההוצאה הראשונה.

סעיף ב

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$$

תשובה: $\frac{5}{14}$, כלומר כ־0.357.

סעיף ג

$$\frac{20}{56}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{20}{56}+\frac{6}{56}=\frac{26}{56}=\frac{13}{28}$$

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: $\frac{13}{28}$, כלומר כ־0.464.

סעיף ד

$$1-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$$

תשובה: $\frac{15}{28}$, כלומר כ־0.536.

סעיף ה

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{25}{64}\approx 0.391>0.357$$

תשובה: גדולה יותר: עם החזרה, הכדור האדום הראשון חוזר ומגדיל את הסיכוי בהוצאה השנייה.

תרגיל 10 שאלה ברמת בגרות: גלגל המבצע

ברשת חנויות נערך מבצע: אחרי כל קנייה מסובבים גלגל בעל 8 סקטורים שווים. בסקטור אחד יש פרס גדול, ב־3 סקטורים יש הנחה, וב־4 סקטורים אין פרס. דנה קנתה פעמיים, והיא מסובבת את הגלגל פעמיים.



פרס: פרס גדול. ריק: בלי פרס

א. מהי ההסתברות לכל אחת משלוש התוצאות בסיבוב אחד?

ב. מהי ההסתברות שדנה לא תזכה בשום דבר בשני הסיבובים?

ג. מהי ההסתברות שבשני הסיבובים תתקבל אותה תוצאה?

ד. מהי ההסתברות שדנה תקבל הנחה בסיבוב אחד ופרס גדול בסיבוב האחר?

ה. מהי ההסתברות שדנה תזכה בפרס כלשהו (הנחה או פרס גדול) בסיבוב אחד לפחות?

ו. ברשת אחרת יש גלגל בעל 10 סקטורים שווים. ההסתברות לא לזכות בשום דבר בשני סיבובים בגלגל זה היא 0.36. (1) כמה סקטורים ללא פרס יש בו? (2) באיזה גלגל עדיף לסובב פעמיים, אם רוצים לזכות בפרס כלשהו בסיבוב אחד לפחות? נמקו.

מה מתרגלים: שאלה מלאה: הסתברות כחלק מגלגל, כפל, אותה תוצאה, שני סדרים, משלים, הסקה הפוכה והשוואה

פתרון מלא

סעיף א

$$P(\text{בלי פרס})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\qquad P(\text{הנחה})=\frac{3}{8}\qquad P(\text{פרס גדול})=\frac{1}{8}$$

תשובה: פרס גדול: $\frac{1}{8}$. הנחה: $\frac{3}{8}$. בלי פרס: $\frac{1}{2}$.

סעיף ב

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

תשובה: $\frac{1}{4}$.

סעיף ג

$$(\frac{1}{8})^2+(\frac{3}{8})^2+(\frac{4}{8})^2=\frac{1+9+16}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}$$

תשובה: $\frac{13}{32}$, כלומר כ־0.406.

סעיף ד

יש שני סדרים:

$$2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

תשובה: $\frac{3}{32}$, כלומר כ־0.094.

סעיף ה

המאורע המשלים הוא שלא תזכה בשום דבר בשני הסיבובים, וזה סעיף ב:

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

תשובה: $\frac{3}{4}$.

סעיף ו

(1) נסמן ב־p את ההסתברות לסקטור ללא פרס:

$$p^2=0.36\qquad\rightarrow\qquad p=0.6$$

בגלגל 10 סקטורים, ולכן $0.6\cdot 10=6$ סקטורים.

תשובה: 6 סקטורים ללא פרס.

(2) בגלגל השני ההסתברות לזכות לפחות פעם אחת היא $1-0.36=0.64$, ובגלגל הראשון היא 0.75.

תשובה: עדיף הגלגל הראשון, כי $0.64<0.75$.

© אור בן שטרית · אינסוף

11. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ.

תרגיל מודרך 1 שני מאורעות: ארבע שאלות

ההסתברות שיעל תגיע למסיבה היא 0.7, וההסתברות שעמית יגיע למסיבה היא 0.4. ההגעות אינן תלויות זו בזו.

השלימו את הפתרון

שניהם יגיעו: _____ $= 0.4 \cdot 0.7$.

אף אחד מהם לא יגיע: _____ $=$ _____ $\cdot 0.3$.

בדיוק אחד מהם יגיע: _____ $=$ _____ $\cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7$.

לפחות אחד מהם יגיע: _____ $=$ _____ $- 1$.

בדיקה: סכום ההסתברויות של «שניהם», «אף אחד» ו«בדיוק אחד» הוא _____ .

מה מתרגלים: כפל, מסלולים, משלים, בדיקה

תרגיל מודרך 2 «לפחות פעם אחת» בשלושה ימים

ההסתברות לגשם בכל אחד משלושה ימים היא 0.2, בלי תלות בימים האחרים. מהי ההסתברות שירד גשם לפחות באחד הימים?

השלימו את הפתרון

ההסתברות שלא ירד גשם ביום מסוים: _____ .

ההסתברות שלא ירד גשם בשלושת הימים: _____ $= 0.8^3$.

ההסתברות שירד גשם לפחות באחד הימים: _____ $=$ _____ $- 1$.

מה מתרגלים: משלים בשלושה שלבים

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל מודרך 3 אותו צבע, עם החזרה

בשקית 4 כדורים אדומים ו־6 כדורים כחולים. מוציאים כדור, מחזירים אותו, ומוציאים כדור נוסף. מהי ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

השלימו את הפתרון

_____ = P(אדום) ו־ _____ = P(כחול).

שני אדומים: _____ . שני כחולים: _____ .

אותו צבע: _____ .

צבעים שונים: _____ = _____ − 1.

מה מתרגלים: «אותו צבע» כסכום שני מסלולים

מצאו את הטעות 1 «לפחות» בחיבור

ההסתברות להצלחה בכל ניסיון היא 0.6, והניסיונות בלתי תלויים. מהי ההסתברות להצלחה לפחות באחד משני ניסיונות?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 הצלחה בניסיון הראשון: 0.6.

שורה 2 הצלחה בניסיון השני: 0.6.

שורה 3 לפחות הצלחה אחת: $0.6 + 0.6 = 1.2$.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: משלים, בדיקת סבירות

מצאו את הטעות 2 «בדיוק אחד» בלי שני הסדרים

ההסתברות לזכייה במשחק היא 0.3, והמשחקים בלתי תלויים. מהי ההסתברות לזכות בדיוק באחד משני משחקים?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 זכייה ואחריה הפסד: $0.3 \cdot 0.7 = 0.21$.

שורה 2 זו ההסתברות המבוקשת: 0.21.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: שני מסלולים

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 3 «אותה תוצאה» חלקית

אדם בוחר באקראי בין שלושה טעמים של גלידה בהסתברויות 0.5, 0.3 ו־0.2. שני אנשים בוחרים בלי תלות זה בזה. מהי ההסתברות ששניהם יבחרו באותו טעם?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 ההסתברות הגדולה ביותר היא 0.5.

שורה 2 שניהם בוחרים באותו טעם: $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: חיבור של כל המסלולים המתאימים

מצאו את הטעות 4 בלי החזרה עם הסתברות קבועה

בשקית 3 כדורים אדומים ו־5 כדורים לבנים. מוציאים שני כדורים בלי החזרה. מהי ההסתברות ששניהם אדומים?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 ההסתברות לכדור אדום היא $\frac{3}{8}$.

שורה 2 שני כדורים אדומים: $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: תלות בין השלבים

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול עצמאי הסתברות בשלב אחד ובשני שלבים

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. מטילים קובייה הוגנת. מהי ההסתברות (א) למספר זוגי; (ב) למספר גדול מ־4; (ג) למספר שאינו 6?
2. בשקית 15 כדורים: 6 אדומים, 4 ירוקים ו־5 צהובים. מוציאים כדור באקראי. מהי ההסתברות שהוא (א) ירוק; (ב) אינו אדום?
3. בשאלה יש שלוש תוצאות אפשריות בלבד. ההסתברות לראשונה היא 0.45, ולשנייה היא 0.3. מהי ההסתברות לשלישית?
4. מטילים מטבע פעמיים. מהי ההסתברות (א) ל«עץ» בשתי ההטלות; (ב) ל«עץ» בדיוק בהטלה אחת?
5. שני מאורעות בלתי תלויים. $P(A)=0.8$ ו־$P(B)=0.5$. מצאו את ההסתברות (א) ששניהם יקרו; (ב) שאף אחד מהם לא יקרה; (ג) שבדיוק אחד מהם יקרה; (ד) שלפחות אחד מהם יקרה.
6. ההסתברות לשרב בכל יום היא 0.3, בלי תלות בימים אחרים. במשך 3 ימים, מהי ההסתברות (א) לשרב בכל הימים; (ב) לאף יום של שרב; (ג) ליום שרב אחד לפחות?
7. בגלגל שלושה סקטורים בעלי זוויות 90°, 120° ו־150°. מסובבים פעמיים. מהי ההסתברות שהגלגל ייעצר פעמיים באותו סקטור?
8. מטילים שתי קוביות. מהי ההסתברות (א) לסכום 5; (ב) לאותו מספר בשתי הקוביות?
9. בשקית 3 כדורים אדומים ו־2 כדורים כחולים. מוציאים שני כדורים בלי החזרה. מהי ההסתברות (א) לשני כדורים אדומים; (ב) לאותו צבע?
10. אותה שקית, אבל עם החזרה. מהי ההסתברות (א) לשני כדורים אדומים; (ב) לאותו צבע?
11. ההסתברות להצלחה בניסיון היא p, וההסתברות להצלחה בשני ניסיונות בלתי תלויים היא 0.49. מצאו את p ואת ההסתברות לכישלון בשני הניסיונות.
12. בשקית 6 כדורים אדומים ו־18 כדורים כחולים. כמה כדורים אדומים צריך להוסיף כדי שההסתברות לכדור אדום תהיה 0.5?

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. בכל סיבוב במשחק ההסתברות לניצחון היא 0.6, ההסתברות לתיקו היא 0.1, והשאר הפסד. משחקים שני סיבובים בלתי תלויים. מהי ההסתברות (א) לניצחון בשני הסיבובים; (ב) לאותה תוצאה בשניהם; (ג) לניצחון בדיוק בסיבוב אחד; (ד) להפסד אחד לפחות?

14. בקופסה 9 כדורים אדומים ו־3 כדורים כחולים. מוציאים כדור, מחזירים אותו ומוציאים שוב. (א) מהי ההסתברות לשני כדורים כחולים? (ב) מהי ההסתברות לכדור כחול אחד לפחות? (ג) כמה כדורים כחולים צריך להוסיף כדי שההסתברות לכדור כחול בהוצאה אחת תהיה 0.4?

15. שתי מכונות פועלות בלי תלות זו בזו. ההסתברות שפריט ממכונה א תקין היא 0.95, וההסתברות שפריט ממכונה ב תקין היא 0.9. לוקחים פריט אחד מכל מכונה. מהי ההסתברות (א) ששניהם תקינים; (ב) שבדיוק אחד מהם פגום; (ג) שלפחות אחד מהם פגום?

16. ההסתברות לגשם היא 0.3. אם יורד גשם, ההסתברות שרוני תאחר היא 0.5. אם לא יורד גשם, ההסתברות שתאחר היא 0.1. מהי ההסתברות שרוני תאחר?

17. נכון או לא נכון? נמקו. (א) אם $P(A)=0.5$ ו־$P(B)=0.5$, והמאורעות בלתי תלויים, אז ההסתברות שלפחות אחד מהם יקרה היא 1. (ב) אחרי חמש הטלות של «עץ», ההסתברות ל«פלי» בהטלה הבאה גדולה מ־$\frac{1}{2}$. (ג) בגלגל בעל 4 סקטורים, ההסתברות לכל סקטור היא תמיד $\frac{1}{4}$.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

7. מצאו קודם את החלק של כל סקטור מ־360°.

11. $p^2 = 0.49$.

16. סרטטו עץ: בשלב השני ההסתברויות שונות בכל ענף.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

0.28; 0.6, 0.18; 0.4, 0.54; 0.18, 0.82; 1.

תרגיל מודרך 2

0.8; 0.512, 0.512; 0.488.

תרגיל מודרך 3

0.4, 0.6; 0.16, 0.36; 0.52, 0.52; 0.48.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 3: מותר לחבר רק מאורעות זרים, וכאן שתי ההצלחות יכולות לקרות יחד. התוצאה 1.2 גדולה מ־1, וזה אינו אפשרי. נכון: $1 - 0.4^2 = 0.84$.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: יש גם המסלול של הפסד ואחריו זכייה. נכון: $2 \cdot 0.21 = 0.42$.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: אפשר לבחור יחד גם בטעם השני או בשלישי. נכון: $0.5^2 + 0.3^2 + 0.2^2 = 0.38$.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 2: אחרי שיצא כדור אדום נשארו 7 כדורים, ומהם 2 אדומים. נכון: $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

תשובות לתרגול העצמאי

1. (א) $\frac{1}{2}$. (ב) $\frac{1}{3}$. (ג) $\frac{5}{6}$.

2. (א) $\frac{4}{15}$. (ב) $0.6 = \frac{9}{15}$.

3. 0.25.

4. (א) $\frac{1}{4}$. (ב) $\frac{1}{2}$.

5. (א) 0.4. (ב) 0.1. (ג) 0.5. (ד) 0.9.

6. (א) 0.027. (ב) 0.343. (ג) 0.657.

7. $\frac{25}{72} = \frac{25}{144} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$.

8. (א) $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$. (ב) $\frac{1}{6}$.

9. (א) $0.3 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$. (ב) $0.4 = 0.1 + 0.3$.

10. (א) 0.36. (ב) 0.52.

11. $p = 0.7$; 0.09.

12. 12: צריך 18 אדומים מול 18 כחולים.

13. (א) 0.36. (ב) $0.36 + 0.01 + 0.09 = 0.46$. (ג) 0.48. (ד) $1 - 0.7^2 = 0.51$. $2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.48$.

14. (א) $\frac{1}{16}$. (ב) $\frac{7}{16}$. (ג) $(12 + n) \div (3 + n) = 0.4$, ולכן $n = 3$.

15. (א) 0.855. (ב) $0.95 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.9 = 0.14$. (ג) 0.145.

16. $0.3 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.1 = 0.22$.

17. (א) לא נכון: $1 - 0.5^2 = 0.75$. (ב) לא נכון: ההטלות בלתי תלויות. (ג) לא נכון: רק אם הסקטורים שווים.

© אור בן שטרית · אינסוף

13. דף סיכום

בסיס

$$P(A) = \frac{\text{מתאימות}}{\text{כל התוצאות}}$$

- רק כשלכל התוצאות אותו סיכוי. בגלגל: הזווית חלקי $360°$.
- הסתברות היא מספר בין 0 ל־1. כל התוצאות יחד: 1.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

שני שלבים

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- בלתי תלויים: החזרה, ימים שונים, אנשים שונים.
- לאורך מסלול כופלים.
- בין מסלולים מחברים.
- סכום כל המסלולים הוא 1.

טבלה

- שתי קוביות: 36 משבצות שוות סיכוי, סופרים.
- גלגלים לא שווים: בכל משבצת מכפלה, מחברים.

בלי החזרה

- בשלב השני נשאר פריט אחד פחות, וההסתברויות משתנות.

מהמילים לחישוב

המילים	החישוב
בשתי הפעמים	$p \cdot p$
אף פעם	$(1-p)^2$
בדיוק פעם אחת	$2 \cdot p \cdot (1-p)$
לפחות פעם אחת	$1-(1-p)^2$
אותה תוצאה	$p_1^2 + p_2^2 + \dots$
תוצאות שונות	$1 -$ אותה תוצאה
אחד כך ואחד כך	$2 \cdot p_1 \cdot p_2$

שינוי הרכב

- גם המונה וגם המכנה משתנים.
- הסתברות נתונה: $(a+n) \div (N+n) = p$, פותרים.

מלכודות

- «לפחות» אינו סכום.
- «בדיוק אחד» כולל שני סדרים.
- «אותה תוצאה» כוללת את כל התוצאות.
- אחוזים הופכים לעשרוני לפני הכפל.
- תוצאה גדולה מ־1 היא טעות.

© אור בן שטרית · אינסוף