אינסוף
מתמטיקה

אשכול חברה ומדע ואשכול פיננסי כלכלי · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35371

סטטיסטיקה: מדדים, טבלאות ודיאגרמות

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

טבלה של מחירים, דיאגרמת עמודות של ציונים או דיאגרמת עיגול של בחירות: השאלה תמיד אותה שאלה, מה מספרים לנו הנתונים. **תלמיד** ילמד כאן לחשב את המדדים, לעבוד בכיוון ההפוך ולנמק טענות על הממוצע. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2024–2026 ורצף הוראה.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. שלושה מדדי מרכז **3**

3. טבלת שכיחויות: ממוצע משוקלל **4**

4. קריאת דיאגרמות **5**

5. הכיוון ההפוך: סכום שווה לממוצע כפול מספר הערכים **6**

6. מה קורה למדדים כשהנתונים משתנים **7**

7. פיזור: סטיית תקן, רבעונים ועשירונים **8**

8. טיפים וטריקים **9**

9. טעויות נפוצות **9**

10. למורה: רצף הוראה מוצע **10**

11. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **11**

תרגיל 1: ספרים בחודש: רשימה וערך קיצוני 11

תרגיל 2: מידות נעליים: טבלת שכיחויות 12

תרגיל 3: מספר האחים: דיאגרמת עמודות 13

תרגיל 4: כרטיסי מוזיאון: דיאגרמת עיגול 14

תרגיל 5: מכירות במאפייה: ערך חסר 15

תרגיל 6: הספרייה: משוואה בטבלה 16

תרגיל 7: שתי כיתות: ממוצע משותף 17

תרגיל 8: המזנון: ייתכן או לא ייתכן 18

תרגיל 9: פיזור: סטיית תקן ורבעונים 19

תרגיל 10: שאלה ברמת בגרות: תוכנית קריאה בקיץ 20

12. תרגול נוסף **22**

13. תשובות ורמזים **27**

14. דף סיכום **28**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בכל מועד של שאלון 35371 יש שאלה אחת בסטטיסטיקה: לרוב זו שאלה 5, באשכול הפיננסי כלכלי, ולפעמים שאלה 1, באשכול חברה ומדע. הנתונים מוצגים בטבלה או בדיאגרמה, והסעיפים עולים ברמתם:

1. **קריאת הנתונים:** כמה נבדקים יש, ומה יש בכל קטגוריה.
2. **חישוב מדד:** בדרך כלל ממוצע משוקלל, ולפעמים גם חציון או שכיח.
3. **כיוון הפוך:** ערך חסר, x בטבלה, ממוצע שנתון מראש.
4. **שינוי בנתונים:** הוספת נבדקים או שינוי מחיר, ומה קורה לממוצע.
5. **נימוק:** האם טענה נכונה, האם מצב מסוים ייתכן.

מועד	שאלה	הסיפור וההצגה	מה נשאל
קיץ 2024 א	5	השכרת כלי שיט: דיאגרמת עיגול וטבלה	ממוצע משוקלל, הוספת יחידות, משוואה עם ממוצע נתון
קיץ 2024 ב	1	ציונים: דיאגרמת עמודות	מספר נבדקים, ממוצע, חציון, הוספת שני ערכים
קיץ 2025 א	5	חוגים ופעילויות: טבלה	ממוצע, שכיח, אחוז, השפעה של שינוי מחיר
קיץ 2025 ב	5	חבילות נופש: רשימה ודיאגרמת עיגול	ממוצע, ערך חסר מתוך ממוצע חדש, חציון, יחס «פי 2»
קיץ 2026 א	5	מספרה: טבלה	ממוצע משוקלל, הממוצע הגדול ביותר האפשרי, «ייתכן או לא ייתכן»
קיץ 2026 ב	1	קליעות לסל: דיאגרמת עמודות וטבלה	ממוצע, אחוז, x מתוך ממוצעים שווים, בדיקת טענה

מה לומדים מהטבלה

ממוצע מטבלה או מדיאגרמה נדרש בכל ששת המועדים, וכמעט תמיד גם עבודה בכיוון ההפוך. חציון נדרש בשני מועדים, ושכיח באחד. סטיית תקן, רבעונים ועשירונים לא הופיעו בשאלונים האלה, אבל הם בתוכנית הלימודים, ולכן יש להם כאן סעיף קצר. בסעיפים האחרונים הנקודות ניתנות על הנימוק, ולא רק על החישוב.

מה יש בדף הנוסחאות

בדף הנוסחאות מופיעים הממוצע $\bar{x} = (x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) \div N$, כאשר $N = f_1 + \ldots + f_n$, וגם סטיית התקן. החציון והשכיח אינם מופיעים שם.

© אור בן שטרית · אינסוף

2. שלושה מדדי מרכז

מדד מרכז הוא מספר אחד שמייצג קבוצה שלמה של נתונים. יש שלושה, וכל אחד עונה על שאלה אחרת:

המדד	איך מוצאים אותו	על מה הוא עונה
ממוצע	מחברים את כל הערכים ומחלקים במספר הערכים.	כמה היה לכל אחד, אילו כולם היו מקבלים אותו דבר?
חציון	ממיינים מהקטן לגדול ולוקחים את הערך שבאמצע.	מהו הערך שמחצית מהנתונים מתחתיו ומחצית מעליו?
שכיח	מחפשים את הערך שמופיע במספר הפעמים הגדול ביותר.	מהו הערך הנפוץ ביותר?

דוגמה

שבעה תלמידים דיווחו על מספר השעות שישנו בסוף השבוע מעבר לרגיל: 7, 14, 3, 6, 6, 8, 5. מציינים:



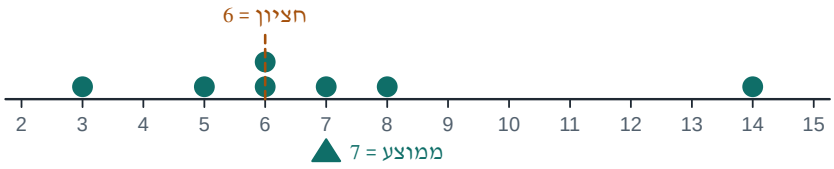
נתונים מסודרים: ב־7 ערכים החציון במקום הרביעי

$$\bar{x} = \frac{5 + 8 + 6 + 6 + 3 + 14 + 7}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

הממוצע הוא 7, החציון הוא 6 והשכיח הוא 6.

אינטואיציה: הממוצע הוא נקודת איזון

דמיינו שכל נתון הוא משקולת על סרגל. הממוצע הוא הנקודה שבה הסרגל מתאזן. הערך 14 רחוק מאוד, ולכן הוא מושך את הממוצע ימינה, אף שרוב הערכים קטנים מ־7.



כל נקודה היא תלמיד אחד. המשולש הוא נקודת האיזון

נימוק: למה זו נקודת איזון?

נחסיר את הממוצע מכל ערך ונחבר את ההפרשים: $0 = 7 + 1 + 0 + (-1) + (-1) + (-2) + (-4)$. המרחקים מתחת לממוצע מתקזזים בדיוק עם המרחקים מעליו. זה נכון לכל קבוצת נתונים, כי סכום הערכים שווה לממוצע כפול מספר הערכים.

חציון כשמספר הערכים זוגי

אם מספר הערכים זוגי, אין ערך אחד באמצע. לוקחים את הממוצע של שני הערכים האמצעיים:

© אור בן שטרית · אינסוף

1	2	3	4	5	6
3	5	**6**	**7**	8	14

ב־6 ערכים החציון הוא הממוצע של המקום השלישי והרביעי: $(6 + 7) \div 2 = 6.5$

ערך קיצוני

משכורות חמישה עובדים (אלפי שקלים)	ממוצע	חציון
8, 9, 10, 11, 12	10	10
8, 9, 10, 11, 62	20	10

הממוצע הוכפל, אף שרק עובד אחד השתנה, וארבעה מתוך חמשת העובדים מרוויחים פחות מהממוצע החדש. החציון לא זז. לכן, כשיש ערכים קיצוניים, החציון מייצג טוב יותר ערך «טיפוסי».

למורה

דיון מומלץ: «חברה מפרסמת שהמשכורת הממוצעת אצלה היא 20,000 שקלים. האם זה אומר שרוב העובדים מרוויחים בערך את הסכום הזה?» הטבלה שלמעלה נותנת דוגמה נגדית. הדיון מחבר בין הנושא לבין קריאה ביקורתית של פרסומים, שהיא חלק ממטרות התוכנית.

3. טבלת שכיחויות: ממוצע משוקלל

בטבלת שכיחויות כתוב כל ערך x, ולידו כמה פעמים הוא מופיע, כלומר השכיחות f שלו. לדוגמה, בסקר של 20 משפחות נשאל כמה ילדים יש בכל משפחה. הוסיפו לטבלה שתי עמודות עזר:

מספר הילדים (x)	מספר המשפחות (f)	$x \cdot f$	שכיחות מצטברת
0	2	0	2
1	5	5	7
2	8	16	15
3	4	12	19
4	1	4	20
סך הכול	**20**	**37**	

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n}{N} = \frac{37}{20} = 1.85$$

- **השכיח** הוא 2, כי לערך זה השכיחות הגדולה ביותר. השכיח הוא הערך, ולא השכיחות 8.
- **החציון:** $N = 20$ זוגי, ולכן מסתכלים על המקומות 10 ו־11. לפי השכיחות המצטברת, המקומות 8 עד 15 תפוסים בערך 2. שני המקומות נופלים שם, ולכן החציון הוא 2.

נימוק: למה כופלים ב־f?

שורה בטבלה היא קיצור של חיבור חוזר. שמונה משפחות עם 2 ילדים הן $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 8$. לכן $x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$ הוא בדיוק סכום כל הערכים, אילו היינו רושמים את כולם ברשימה.

© אור בן שטרית · אינסוף

מספר הערכים	איפה נמצא החציון	דוגמה
אי־זוגי	במקום $(N+1)\div 2$	$N=21$: המקום ה־11
זוגי	ממוצע של המקומות $N\div 2$ ו־$N\div 2+1$	$N=20$: המקומות 10 ו־11

טעות נפוצה

הממוצע של הטבלה אינו $(4+3+2+1+0)\div 5=2$. חישוב כזה מתעלם מהשכיחויות ומניח שכל ערך מופיע אותו מספר פעמים. גם $37\div 5$ שגוי: מחלקים במספר הנבדקים, ולא במספר השורות.

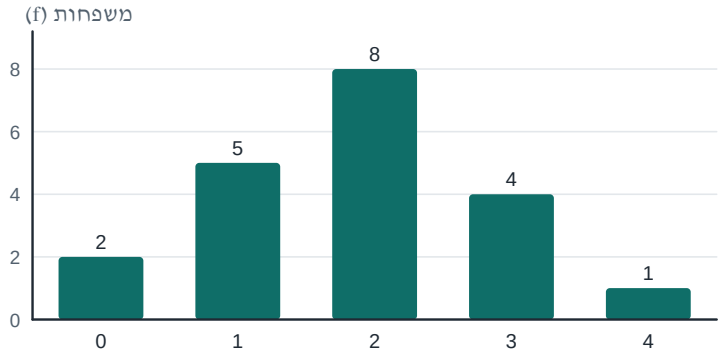
טיפ

בדיקה מהירה: הממוצע חייב להיות בין הערך הקטן ביותר לגדול ביותר, וקרוב לערכים בעלי השכיחות הגדולה. אם יצא 3.7 בטבלה הזו, ברור שיש טעות.

4. קריאת דיאגרמות

דיאגרמת עמודות

כל עמודה היא שורה בטבלת שכיחויות: המיקום על הציר האופקי הוא הערך x, והגובה הוא השכיחות f. המעבר הראשון בכל שאלה הוא להעתיק את הדיאגרמה לטבלה.



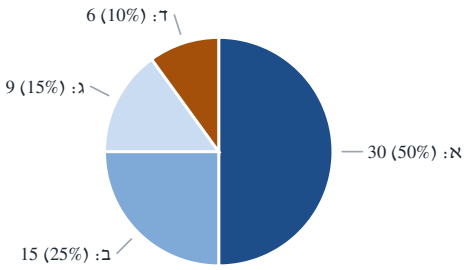
אותו סקר בדיאגרמת עמודות

דיאגרמת עיגול

העיגול כולו הוא כל הנבדקים, כלומר 100%, או 360°. כל סקטור הוא חלק מהם. שלושה מעברים חוזרים על עצמם:

המעבר	החישוב	דוגמה: $N=60$, הסקטור 15%
מאחוז למספר נבדקים	$N\cdot p\div 100$	$60\cdot 15\div 100=9$
מאחוז למעלות	$p\cdot 3.6$	$15\cdot 3.6=54^\circ$
ממספר נבדקים לאחוז	$f\div N\cdot 100$	$9\div 60\cdot 100=15$

© אור בן שטרית · אינסוף



$N = 60$: מספר ואחוז בכל סקטור

טיפ

שווה לזכור: 25% הם 90°, 50% הם 180° ו־10% הם 36°. אם האחוזים לא מסתכמים ל־100, או שהמעלות לא מסתכמות ל־360°, יש טעות או שחסר סקטור שצריך לחשב.

אחרי שממירים את הסקטורים למספרי נבדקים, מקבלים טבלת שכיחויות רגילה וממשיכים כמו קודם.

בבגרות

בדיאגרמת עיגול אין לפעמים ערך לכל סקטור, אלא רק לחלק מהם. מוצאים את החסר מכך שהכול מסתכם ל־100%. כשיש יחס בין סקטורים, כמו «פי 2», נוח לסמן את הסקטור הקטן ב־x ולפתור משוואה.

5. הכיוון ההפוך: סכום שווה לממוצע כפול מספר הערכים

$$\text{סכום הערכים} = \bar{x} \cdot N$$

הכלל הפשוט הזה פותר כמעט כל שאלה בכיוון ההפוך. כשנתון ממוצע, נתון בעצם סכום.

ערך חסר

ממוצע ציוניה של נועה ב־4 מבחנים הוא 80. איזה ציון היא צריכה במבחן החמישי כדי שהממוצע יהיה 82?

הסכום עכשיו: $80 \cdot 4 = 320$. הסכום הדרוש: $82 \cdot 5 = 410$. ההפרש: $410 - 320 = 90$. נועה צריכה ציון 90.

x בטבלה

בטבלה הערכים הם 10, 20 ו־30, והשכיחויות שלהם הן 4, x ו־6. הממוצע הוא 21. מציבים בנוסחה, ומספר הנבדקים הוא $10 + x$:

$$\frac{10 \cdot 4 + 20x + 30 \cdot 6}{10 + x} = 21$$

$$220 + 20x = 21(10 + x)$$

$$220 + 20x = 210 + 21x$$

$$x = 10$$

בדיקה: $N = 20$, הסכום הוא $40 + 200 + 180 = 420$, ו־$420 \div 20 = 21$.

טעות נפוצה

במכנה לא כותבים רק את המספרים הידועים. אם שכיחות אחת היא x, גם מספר הנבדקים תלוי ב־x. זו הטעות הנפוצה ביותר בסעיף הזה.

ממוצע של שתי קבוצות יחד

בכיתה א יש 10 תלמידים עם ממוצע 90, ובכיתה ב יש 30 תלמידים עם ממוצע 70. הממוצע של כולם אינו 80:

$$\frac{10 \cdot 90 + 30 \cdot 70}{40} = \frac{3{,}000}{40} = 75$$

© אור בן שטרית · אינסוף

אינטואיציה

הממוצע המשותף נמצא בין שני הממוצעים, קרוב יותר לממוצע של הקבוצה הגדולה. כאן כיתה ב גדולה פי 3 מכיתה א, ולכן הממוצע המשותף רחוק מ־90 פי 3 יותר מאשר מ־70.

6. מה קורה למדדים כשהנתונים משתנים

השינוי	ממוצע	חציון	סטיית תקן
מוסיפים לכל הערכים מספר קבוע c	גדל ב־c	גדל ב־c	לא משתנה
כופלים את כל הערכים במספר חיובי k	מוכפל ב־k	מוכפל ב־k	מוכפלת ב־k
מגדילים רק את הערך הגדול ביותר	גדל	לא משתנה	גדלה

הוספת ערך חדש

זה הכלל שעומד מאחורי כל שאלות ה«ייתכן או לא ייתכן»:

הערך החדש	הממוצע החדש
גדול מהממוצע הישן	גדול מהממוצע הישן
שווה לממוצע הישן	לא משתנה
קטן מהממוצע הישן	קטן מהממוצע הישן

נימוק: למה זה כך?

נניח שיש N ערכים עם ממוצע $\bar{x}$, ומוסיפים ערך v. הסכום החדש הוא $N\cdot\bar{x}+v$, והשינוי בממוצע הוא:

$$\frac{N\cdot\bar{x}+v}{N+1}-\bar{x}=\frac{v-\bar{x}}{N+1}$$

השינוי חיובי בדיוק כאשר $v>\bar{x}$. לדוגמה, אם $N=9$, $\bar{x}=40$ ו־$v=50$, הממוצע גדל ב־$10\div 10=1$ והופך ל־41.

אינטואיציה

שחקן שמצטרף לקבוצה וקולע יותר מהממוצע שלה מעלה את הממוצע. שחקן שקולע פחות מוריד אותו. לא משנה אם הוא טוב מרוב השחקנים או לא: מה שקובע הוא רק ההשוואה לממוצע.

הממוצע הגדול ביותר האפשרי

אם מוסיפים לקוחות ולא ידוע מה יבחרו, הממוצע הגדול ביותר מתקבל כאשר כולם בוחרים את האפשרות היקרה ביותר, והקטן ביותר כאשר כולם בוחרים את הזולה ביותר. אם יש הנחה, מחשבים קודם את המחיר אחריה, ורק אז משווים לממוצע.

בבגרות

בשאלה «ייתכן או לא ייתכן» אין צורך בחישוב ארוך. מחשבים את הערך החדש, כותבים השוואה אחת מול הממוצע ומשפט אחד: «$21.6<24.6$, ולכן הממוצע יורד, והדבר ייתכן». זה הנימוק המלא.

© אור בן שטרית · אינסוף

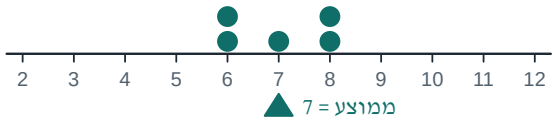
7. פיזור: סטיית תקן, רבעונים ועשירונים

סטיית תקן

שתי קבוצות יכולות להיות בעלות אותו ממוצע, אבל שונות מאוד בפיזור. סטיית התקן מודדת עד כמה הנתונים מפוזרים סביב הממוצע.



$S \approx 2.83$



$S \approx 0.89$

$$S = \sqrt{\left(\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N}\right)}$$

מחשבים לפי שלבים, בטבלה. כך עבור הנתונים 3, 5, 7, 9, 11, שהממוצע שלהם הוא 7:

x	3	5	7	9	11	סך הכול
$x - \bar{x}$	-4	-2	0	2	4	0
$(x - \bar{x})^2$	16	4	0	4	16	40

$$S = \sqrt{\left(\frac{40}{5}\right)} = \sqrt{8} \approx 2.83$$

אינטואיציה

סטיית התקן היא מעין «מרחק טיפוסי» של נתון מהממוצע. מעלים בריבוע כדי שמרחקים שליליים לא יתקזזו עם חיוביים, ובסוף מוציאים שורש כדי לחזור ליחידות המקוריות.

למורה

סטיית תקן לא הופיעה בשאלון 35371 בשנים 2024–2026, אבל היא בתוכנית הלימודים ובדף הנוסחאות, והיא בסיס להתפלגות הנורמלית בכיתה י״ב. די בשתי דוגמאות קטנות, עם דגש על המשמעות: אותו ממוצע, פיזור שונה.

רבעונים ועשירונים

רבעונים ועשירונים מחלקים רשימה ממוינת לחלקים שווים. לפי תוכנית הלימודים:

- **הרבעון ה־i** הוא הערך שבמקום $i(n+1) \div 4$.
- **העשירון ה־i** הוא הערך שבמקום $i(n+1) \div 10$.
- אם המקום אינו מספר שלם, והחלק השלם שלו הוא k, לוקחים את הממוצע של הערכים שבמקומות k ו־$k+1$.

			Q1				Q2				Q3			
12	14	15	**15**	17	18	20	**21**	21	23	24	**26**	27	30	35
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$n = 15$: הרבעונים במקומות 4, 8 ו־12

© אור בן שטרית · אינסוף

כאן $n = 15$, ולכן $n + 1 = 16$. הרבעון הראשון הוא במקום 4, כלומר 15. הרבעון השני הוא במקום 8, כלומר 21, וזה גם החציון. הרבעון השלישי הוא במקום 12, כלומר 26. העשירון השלישי הוא במקום $3 \cdot 16 \div 10 = 4.8$, ולכן לוקחים את הממוצע של המקומות 4 ו־5: $(15 + 17) \div 2 = 16$.

8. טיפים וטריקים

1. **העתיקו לטבלה:** כל דיאגרמה הופכת לטבלה עם עמודות x, f ו־$x \cdot f$. אחרי זה השאלה תמיד נראית אותו דבר.
2. **נתון ממוצע? כתבו סכום:** $N \cdot \bar{x}$. זה הצעד הראשון בכל שאלה בכיוון ההפוך.
3. **מקום החציון לפני הכול:** כתבו ליד הטבלה «$N = 30$: מקומות 15 ו־16». כך אי אפשר להתבלבל.
4. **שכיחות מצטברת:** בטבלה ארוכה, חברו את השכיחויות משורה לשורה עד שעוברים את מקום החציון.
5. **בדיקת סבירות:** הממוצע נמצא תמיד בין הערך הקטן לגדול, וקרוב לערכים השכיחים.
6. **השוואה לפני חישוב:** כדי לדעת אם ערך חדש מעלה או מוריד את הממוצע, די להשוות אותו לממוצע הקיים.
7. **רק ערכים שמשתנים:** כשמחיר אחד משתנה, אין צורך לחשב הכול מחדש. הסכום משתנה ב־(שינוי המחיר) כפול (שכיחות).
8. **אחוז מקבוצה:** «כמה אחוזים» היא תמיד שכיחות חלקי N כפול 100. בדקו למי מתייחסים: לכולם, או רק לחלק מהם.
9. **כותרות הטבלה:** קראו תמיד את כותרות הציר והשורות. בלבול בין המחיר למספר הלקוחות הוא טעות יקרה.
10. **יחידות במילים:** סיימו כל תשובה במילים וביחידות: «ממוצע של 3.6 ספרים לילד».

9. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
ממוצע של הערכים בלי השכיחויות	מתייחסים לטבלה כאל רשימה קצרה	מחשבים $x_1f_1 + \ldots + x_nf_n$ ומחלקים ב־N.
חילוק במספר השורות במקום ב־N	בלבול בין מספר הערכים השונים למספר הנבדקים	N הוא סכום השכיחויות.
השכיח הוא השכיחות (למשל, «השכיח הוא 12»)	המילים דומות	השכיח הוא הערך x שבו השכיחות הגדולה ביותר.
חציון בלי מיון	לוקחים את האמצע של הרשימה כפי שנכתבה	ממיינים לפני הכול.
חציון הוא $(N + 1) \div 2$	מקום נתפס כערך	זה מקום החציון. הערך נמצא בטבלה באותו מקום.
ממוצע של ממוצעים בקבוצות שונות בגודלן	נדמה שהממוצע «באמצע»	מחברים סכומים ומחלקים במספר הכולל.
במשוואה עם x, מכנה בלי x	רואים רק את המספרים הידועים	N כולל את השכיחות הלא ידועה.

© אור בן שטרית · אינסוף

הטעות	למה היא קורה	התיקון
אחרי הוספת ערכים מחלקים ב־N הישן	מעדכנים רק את המונה	גם N גדל.
בסקטור מחשבים אחוז מ־360	בלבול בין אחוזים למעלות	אחוזים מתוך 100, מעלות מתוך 360.
הממוצע חייב להיות ערך מהרשימה	בחיים הממוצע נתפס כדבר קיים	ממוצע של 1.85 ילדים הוא תקין לחלוטין.

10. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים קובעת 40 שעות לכל אשכול ואינה מחלקת אותן בין הנושאים, ולכן מספרי השעות בטבלה הם הצעה בלבד. כדאי להשתמש בנתונים אמיתיים של הכיתה, למשל מספר האחים או זמן ההגעה לבית הספר.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
מדדי מרכז	1.5	ממוצע, חציון, שכיח ברשימה; ערך קיצוני	«מה ישתנה אם נוסיף לכיתה תלמיד שמתגורר רחוק מאוד?»
טבלת שכיחויות	2	ממוצע משוקלל, מקום החציון, שכיחות מצטברת	«למה אי אפשר לחבר רק את הערכים?»
דיאגרמות	1.5	מעבר בין עמודות, עיגול וטבלה; אחוזים ומעלות	«איזו דיאגרמה מתאימה יותר, ולמה?»
הכיוון ההפוך	2	סכום שווה לממוצע כפול N; ערך חסר x בטבלה	«מה אתם יודעים ברגע שנתון ממוצע?»
שינוי נתונים ונימוק	1.5	הוספת ערך, שינוי מחיר, «ייתכן או לא ייתכן»	«האם צריך לחשב כדי לדעת אם הממוצע עלה?»
פיזור	1.5	סטיית תקן, רבעונים, עשירונים	«אותו ממוצע: אז מה שונה בין שתי הקבוצות?»
שאלה מלאה	1	שאלת בגרות מתחילתה ועד סופה	«איזה סעיף תלוי באיזה סעיף?»

למורה: שאלת סיום קצרה לאבחון

בקשו לחבר קבוצה של חמישה ערכים שהממוצע שלה 10 והחציון שלה 8. מי שמצליח מבין שהמדדים הם בלתי תלויים, ושאפשר לשלוט בכל אחד מהם. תשובה לדוגמה: 6, 7, 8, 9, 20.

© אור בן שטרית · אינסוף

11. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. כל הנתונים בדיוניים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 ספרים בחודש: רשימה וערך קיצוני

תשעה תלמידים דיווחו כמה ספרים קראו בחודש האחרון: 2, 5, 3, 3, 8, 4, 3, 6, 2.

א. מצאו את הממוצע, את החציון ואת השכיח של הנתונים.

ב. תלמיד עשירי דיווח שקרא 14 ספרים. מצאו את הממוצע, את החציון ואת השכיח החדשים.

ג. איזה מדד השתנה יותר, הממוצע או החציון? הסבירו מדוע.

ד. כמה אחוזים מעשרת התלמידים קראו יותר ספרים מהממוצע החדש?

מה מתרגלים: שלושת המדדים ברשימה, מספר ערכים זוגי ואי־זוגי, השפעת ערך קיצוני

פתרון מלא

סעיף א

ממיינים: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 8.

$$\bar{x} = \frac{2+2+3+3+3+4+5+6+8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

מספר הערכים הוא 9, ולכן החציון נמצא במקום $(9+1) \div 2 = 5$. הערך במקום זה הוא 3. הערך 3 מופיע 3 פעמים, יותר מכל ערך אחר.

תשובה: ממוצע 4, חציון 3, שכיח 3.

סעיף ב

הרשימה הממוינת: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 8, 14.

$$\bar{x} = \frac{36+14}{10} = 5$$

מספר הערכים זוגי, ולכן לוקחים את הממוצע של המקומות 5 ו־6: $(3+4) \div 2 = 3.5$. השכיח לא השתנה.

תשובה: ממוצע 5, חציון 3.5, שכיח 3.

סעיף ג

הממוצע גדל ב־1, והחציון גדל ב־0.5. בממוצע נכנס גודלו של כל ערך, ולכן הערך הקיצוני 14 משפיע עליו מאוד. בחציון קובע רק הסדר, ולכן לא משנה אם הערך החדש הוא 14 או 100.

תשובה: הממוצע השתנה יותר.

סעיף ד

הערכים הגדולים מ־5 הם 6, 8 ו־14, כלומר 3 תלמידים מתוך 10.

תשובה: 30%.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 2 מידות נעליים: טבלת שכיחויות

בטבלה מוצגת התפלגות מידות הנעליים של כל הזוגות שנמכרו בחנות ביום מסוים.

מידה	36	37	38	39	40
מספר הזוגות	4	7	10	6	3

א. כמה זוגות נמכרו בחנות באותו יום?

ב. מצאו את המידה הממוצעת.

ג. מצאו את השכיח ואת החציון של מידות הנעליים.

ד. כמה אחוזים מהזוגות היו במידה 39 או במידה גדולה ממנה?

ה. בסוף היום נמכרו עוד 5 זוגות במידה 40. מצאו את המידה הממוצעת החדשה ואת החציון החדש.

מה מתרגלים: ממוצע משוקלל, שכיחות מצטברת, אחוז, עדכון הסכום אחרי הוספת ערכים

פתרון מלא

סעיף א

$$N = 4 + 7 + 10 + 6 + 3 = 30$$

תשובה: 30 זוגות.

סעיף ב

$$\bar{x} = \frac{36 \cdot 4 + 37 \cdot 7 + 38 \cdot 10 + 39 \cdot 6 + 40 \cdot 3}{30} = \frac{144 + 259 + 380 + 234 + 120}{30} = \frac{1{,}137}{30} = 37.9$$

תשובה: המידה הממוצעת היא 37.9.

סעיף ג

השכיחות הגדולה ביותר, 10, היא של מידה 38. $N = 30$ זוגי, ולכן מסתכלים על המקומות 15 ו־16.

השכיחויות המצטברות הן 4, 11, 21, ושני המקומות נופלים במידה 38.

תשובה: השכיח הוא 38 והחציון הוא 38.

סעיף ד

$$\frac{6 + 3}{30} \cdot 100 = 30$$

תשובה: 30%.

סעיף ה

נוספו 5 זוגות, וכל אחד מהם מוסיף 40 לסכום:

$$\bar{x} = \frac{1{,}137 + 5 \cdot 40}{35} = \frac{1{,}337}{35} = 38.2$$

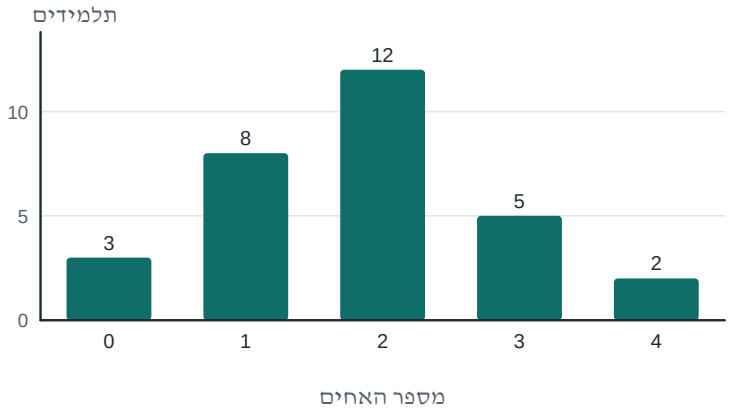
עכשיו $N = 35$ אי־זוגי, והחציון נמצא במקום $(35 + 1) \div 2 = 18$. המקומות 12 עד 21 תפוסים במידה 38, ולכן החציון לא השתנה.

תשובה: הממוצע החדש הוא 38.2, והחציון נשאר 38.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 3 מספר האחים: דיאגרמת עמודות

בדיאגרמה מתוארת התפלגות מספר האחים של התלמידים בשכבה קטנה.



מספר האחים של כל תלמיד בשכבה

א. כמה תלמידים יש בשכבה?

ב. מצאו את הממוצע, את החציון ואת השכיח של מספר האחים.

ג. כמה אחוזים מהתלמידים הם בעלי 3 אחים לפחות?

ד. לשכבה הצטרפו שני תלמידים, ולכל אחד מהם 4 אחים. בלי לחשב, קבעו אם הממוצע גדל, קטן או לא השתנה. נמקו, ואחר כך מצאו את הממוצע החדש.

מה מתרגלים: מעבר מדיאגרמה לטבלה, שלושת המדדים, נימוק בלי חישוב

פתרון מלא

סעיף א

$$N = 3 + 8 + 12 + 5 + 2 = 30$$

תשובה: 30 תלמידים.

סעיף ב

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{30} = \frac{55}{30} \approx 1.83$$

החציון: מקומות 15 ו־16. השכיחויות המצטברות הן 3, 11, 23, ולכן בשני המקומות הערך הוא 2. השכיחות הגדולה ביותר היא של הערך 2.

תשובה: ממוצע כ־1.83, חציון 2, שכיח 2.

סעיף ג

$$\frac{5 + 2}{30} \cdot 100 \approx 23.3$$

תשובה: כ־23.3%.

סעיף ד

הערך החדש 4 גדול מהממוצע הקיים, ולכן הממוצע גדל.

© אור בן שטרית · אינסוף

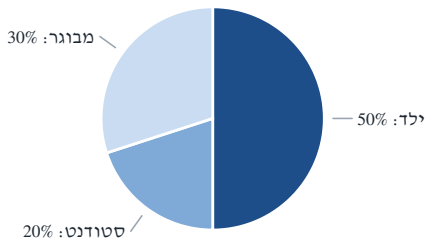
$$\bar{x} = \frac{55 + 2 \cdot 4}{32} = \frac{63}{32} \approx 1.97$$

תשובה: הממוצע גדל, והממוצע החדש הוא כ־1.97.

תרגיל 4 כרטיסי מוזיאון: דיאגרמת עיגול

במוזיאון נמכרו ביום מסוים 120 כרטיסים משלושה סוגים: כרטיס ילד, כרטיס סטודנט וכרטיס מבוגר. הדיאגרמה מציגה את התפלגות הכרטיסים, והטבלה מציגה את מחיריהם.

סוג הכרטיס	מחיר (שקלים)
ילד	20
סטודנט	30
מבוגר	50



הכרטיסים שנמכרו

א. מהי הזווית של הסקטור של כרטיסי הסטודנטים?

ב. כמה כרטיסים מכל סוג נמכרו? פי כמה גדול מספר כרטיסי הילדים ממספר כרטיסי הסטודנטים?

ג. מצאו את המחיר הממוצע של כרטיס שנמכר באותו יום.

ד. מצאו את החציון של מחירי הכרטיסים.

ה. אילו מחיר כרטיס מבוגר היה נמוך ב־10 שקלים, מה היה המחיר הממוצע? האם החציון היה משתנה?

מה מתרגלים: מעבר מאחוז למעלות ולמספר נבדקים, ממוצע משוקלל, חציון בין שתי קטגוריות, שינוי מחיר

פתרון מלא

סעיף א

$$20 \cdot 3.6 = 72$$

תשובה: $72°$.

סעיף ב

ילד: $120 \cdot 0.5 = 60$. סטודנט: $120 \cdot 0.2 = 24$. מבוגר: $120 \cdot 0.3 = 36$. היחס הוא $60 \div 24 = 2.5$.

תשובה: 60 כרטיסי ילד, 24 כרטיסי סטודנט ו־36 כרטיסי מבוגר. מספר כרטיסי הילדים גדול פי 2.5.

סעיף ג

$$\bar{x} = \frac{60 \cdot 20 + 24 \cdot 30 + 36 \cdot 50}{120} = \frac{1{,}200 + 720 + 1{,}800}{120} = \frac{3{,}720}{120} = 31$$

תשובה: 31 שקלים.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

$N = 120$, ולכן מסתכלים על המקומות 60 ו־61. מציינים לפי המחיר: המקומות 1 עד 60 הם 20 שקלים, והמקום 61 הוא 30 שקלים.

$$\frac{20 + 30}{2} = 25$$

תשובה: 25 שקלים. אף כרטיס לא עולה 25 שקלים, וזה תקין.

סעיף ה

הסכום קטן ב־$360 = 10 \cdot 36$ שקלים:

$$\bar{x} = \frac{3{,}720 - 360}{120} = \frac{3{,}360}{120} = 28$$

המקומות 60 ו־61 לא משתנים, כי המחיר החדש, 40 שקלים, עדיין גבוה יותר.

תשובה: המחיר הממוצע היה 28 שקלים, והחציון לא היה משתנה.

תרגיל 5 מכירות במאפייה: ערך חסר

במהלך 5 ימים נמכרו במאפייה עוגות, ומספרן בכל יום היה 44, 38, 46, 52, 40.

א. מצאו את מספר העוגות הממוצע ליום.

ב. אחרי היום השישי, הממוצע של ששת הימים היה 46 עוגות ליום. כמה עוגות נמכרו ביום השישי?

ג. מצאו את החציון של ששת הימים.

ד. כמה עוגות צריך למכור ביום השביעי כדי שהממוצע של שבעת הימים יהיה 47?

מה מתרגלים: מעבר מממוצע לסכום, ערך חסר, חציון במספר זוגי של ערכים

פתרון מלא

סעיף א

$$\bar{x} = \frac{40 + 52 + 46 + 38 + 44}{5} = \frac{220}{5} = 44$$

תשובה: 44 עוגות ליום.

סעיף ב

הסכום של 6 הימים הוא $46 \cdot 6 = 276$, ולכן:

$$276 - 220 = 56$$

תשובה: 56 עוגות.

סעיף ג

ממיינים: 38, 40, 44, 46, 52, 56. יש 6 ערכים, ולכן לוקחים את הממוצע של המקומות 3 ו־4:

$$\frac{44 + 46}{2} = 45$$

תשובה: החציון הוא 45.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

הסכום הדרוש ב־7 ימים הוא $7 \cdot 47 = 329$, ולכן:

$$329 - 276 = 53$$

תשובה: 53 עוגות.

תרגיל 6 הספרייה: משוואה בטבלה

בטבלה מוצג מספר הספרים שהשאילו מנויי ספרייה בחודש מסוים. ממוצע הספרים למנוי הוא 2.5.

מספר הספרים	1	2	3	4
מספר המנויים	6	x	8	6

א. מצאו את x.

ב. כמה מנויים יש בספרייה?

ג. מצאו את החציון ואת השכיח של מספר הספרים.

ד. לספרייה הצטרפו 4 מנויים, וכל אחד מהם השאיל 2 ספרים. קבעו בלי חישוב אם הממוצע גדל או קטן, ואחר כך מצאו אותו.

מה מתרגלים: משוואה עם שכיחות לא ידועה, בדיקה, יותר משכיח אחד, נימוק לפני חישוב

פתרון מלא

סעיף א

מספר המנויים הוא $6 + x + 8 + 6 = 20 + x$, ולכן:

$$\frac{1 \cdot 6 + 2x + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{20 + x} = 2.5$$

$$54 + 2x = 2.5(20 + x)$$

$$54 + 2x = 50 + 2.5x$$

$$4 = 0.5x$$

$$x = 8$$

תשובה: $x = 8$.

סעיף ב

$$N = 20 + 8 = 28$$

בדיקה: הסכום הוא $54 + 16 = 70$, ו־$28 \div 70 = 2.5$.

תשובה: 28 מנויים.

סעיף ג

$N = 28$, ולכן מסתכלים על המקומות 14 ו־15. השכיחויות המצטברות הן 6, 14, 22. במקום 14 הערך הוא 2, ובמקום 15 הערך הוא 3:

© אור בן שטרית · אינסוף

$$\frac{2+3}{2}=2.5$$

השכיחות הגדולה ביותר היא 8, והיא מופיעה פעמיים: בערך 2 ובערך 3.

תשובה: החציון הוא 2.5. יש שני שכיחים: 2 ו־3.

סעיף ד

הערך 2 קטן מהממוצע 2.5, ולכן הממוצע קטן.

$$\bar{x}=\frac{70+4\cdot 2}{32}=\frac{78}{32}=2.4375$$

תשובה: הממוצע קטן, והוא כ־2.44 ספרים למנוי.

תרגיל 7 שתי כיתות: ממוצע משותף

בכיתה א יש 20 תלמידים, וממוצע הציונים שלהם במבחן הוא 80. בכיתה ב יש 30 תלמידים, וממוצע הציונים שלהם באותו מבחן הוא 70.

א. תלמיד טוען שהממוצע של כל 50 התלמידים הוא 75. האם הוא צודק? נמקו, ומצאו את הממוצע.

ב. המורה הוסיפה 5 נקודות לכל תלמיד בכיתה ב. מהו עכשיו ממוצע כיתה ב, ומהו הממוצע של כל 50 התלמידים?

ג. בכיתה א נמצאה טעות: ציון של תלמיד אחד תוקן מ־60 ל־100. מהו הממוצע החדש של כיתה א?

ד. האם אפשר לדעת, לפי הנתונים בלבד, אם החציון של כיתה א השתנה בעקבות התיקון? הסבירו.

מה מתרגלים: ממוצע משוקלל של קבוצות, תיקון ערך, הוספת קבוע, הבנה שמדד אחד אינו קובע מדד אחר

פתרון מלא

סעיף א

הכיתות אינן באותו גודל, ולכן אי אפשר לקחת את אמצע הדרך בין הממוצעים. מחשבים סכומים:

$$\bar{x}=\frac{20\cdot 80+30\cdot 70}{50}=\frac{1{,}600+2{,}100}{50}=\frac{3{,}700}{50}=74$$

תשובה: הוא טועה: הממוצע הוא 74. התוצאה קרובה יותר ל־70, כי כיתה ב גדולה יותר.

סעיף ב

הוספת 5 נקודות לכולם מוסיפה 5 לממוצע, ולכן ממוצע כיתה ב הוא 75. מחשבים מחדש:

$$\bar{x}=\frac{1{,}600+30\cdot 75}{50}=\frac{3{,}850}{50}=77$$

תשובה: ממוצע כיתה ב הוא 75, והממוצע של כולם הוא 77.

סעיף ג

הסכום גדל ב־$100-60=40$ נקודות:

$$\bar{x}=\frac{1{,}600+40}{20}=82$$

תשובה: 82.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ד

החציון תלוי בסדר הציונים ובערכים שבאמצע הרשימה, ואלה לא נתונים. אם גם 60 וגם 100 נמצאים באותו צד של החציון, הוא לא ישתנה. אם 60 מתחת לחציון ו־100 מעליו, ייתכן שישתנה.

תשובה: לא. הנתונים אינם מספיקים.

תרגיל 8 המזנון: ייתכן או לא ייתכן

במזנון מוכרים ארבעה סוגי כריכים. בטבלה מוצגים המחירים ומספר הכריכים שנמכרו עד הצהריים.

סוג הכריך	ביצה	גבינה	טונה	עוף
מחיר (שקלים)	18	24	30	36
מספר הכריכים	15	20	10	5

א. מצאו את מספר הכריכים שנמכרו ואת המחיר הממוצע של כריך.

ב. אחר הצהריים נמכרו עוד 3 כריכים. מצאו את המחיר הממוצע הגדול ביותר האפשרי ואת הקטן ביותר האפשרי אחרי המכירה.

ג. ידוע ששלושת הכריכים היו מאותו סוג, ובעקבות המכירה המחיר הממוצע ירד. קבעו בעבור כל היגד אם הוא ייתכן או לא ייתכן, ונמקו.

I. שלושת הכריכים היו כריכי גבינה.

II. שלושת הכריכים היו כריכי טונה בהנחה של 4 שקלים לכריך.

III. שלושת הכריכים היו כריכי עוף בהנחה של 40% לכריך.

מה מתרגלים: ממוצע משוקלל, ממוצע מרבי ומזערי, נימוק בעזרת השוואה לממוצע, הנחה באחוזים

פתרון מלא

סעיף א

$$N = 15 + 20 + 10 + 5 = 50$$

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 15 + 24 \cdot 20 + 30 \cdot 10 + 36 \cdot 5}{50} = \frac{270 + 480 + 300 + 180}{50} = \frac{1{,}230}{50} = 24.6$$

תשובה: 50 כריכים, ומחיר ממוצע של 24.6 שקלים.

סעיף ב

הממוצע הגדול ביותר מתקבל כאשר כל השלושה הם כריכי עוף, והקטן ביותר כאשר כל השלושה הם כריכי ביצה:

$$\frac{1{,}230 + 3 \cdot 18}{53} = \frac{1{,}284}{53} \approx 24.23 \qquad \frac{1{,}230 + 3 \cdot 36}{53} = \frac{1{,}338}{53} \approx 25.25$$

תשובה: הגדול ביותר הוא כ־25.25 שקלים, והקטן ביותר הוא כ־24.23 שקלים.

סעיף ג

הממוצע יורד רק אם מחיר הכריכים החדשים קטן מהממוצע 24.6.

I. $24 < 24.6$.

תשובה: ייתכן.

© אור בן שטרית · אינסוף

II. המחיר אחרי ההנחה הוא $30 - 4 = 26$, ו־$26 > 24.6$, ולכן הממוצע היה עולה.

תשובה: לא ייתכן.

III. המחיר אחרי ההנחה הוא $36 \cdot 0.6 = 21.6$, ו־$21.6 < 24.6$.

תשובה: ייתכן.

תרגיל 9 פיזור: סטיית תקן ורבעונים

שני רצים מדדו את זמניהם, בדקות, בחמש ריצות. זמני הרץ הראשון הם 21, 22, 23, 24, 25, וזמני הרץ השני הם 19, 21, 23, 25, 27.

א. הראו שלשני הרצים אותו ממוצע.

ב. מצאו את סטיית התקן של כל רץ. מי מהם יציב יותר?

ג. הרץ השני שיפר את כל זמניו ב־2 דקות. מה יהיו הממוצע וסטיית התקן שלו? נמקו בלי לחשב מחדש.

ד. ציוני 11 תלמידים הם 55, 60, 62, 70, 71, 75, 80, 84, 85, 90, 97. מצאו את הרבעון הראשון, את הרבעון השלישי ואת העשירון התשיעי.

מה מתרגלים: חישוב סטיית תקן, השוואת פיזור, השפעה של הוספת קבוע, רבעונים ועשירונים

פתרון מלא

סעיף א

$$\frac{19+21+23+25+27}{5}=\frac{115}{5}=23 \qquad \frac{21+22+23+24+25}{5}=\frac{115}{5}=23$$

תשובה: לשני הרצים ממוצע של 23 דקות.

סעיף ב

הרץ הראשון: ההפרשים מהממוצע הם $-2, -1, 0, 1, 2$.

$$S=\sqrt{\left(\frac{4+1+0+1+4}{5}\right)}=\sqrt{2}\approx 1.41$$

הרץ השני: ההפרשים מהממוצע הם $-4, -2, 0, 2, 4$.

$$S=\sqrt{\left(\frac{16+4+0+4+16}{5}\right)}=\sqrt{8}\approx 2.83$$

תשובה: סטיות התקן הן כ־1.41 דקות וכ־2.83 דקות. הרץ הראשון יציב יותר, כי סטיית התקן שלו קטנה יותר.

סעיף ג

הפחתה של 2 דקות מכל הזמנים מפחיתה 2 מהממוצע. המרחקים בין הזמנים לבין הממוצע לא משתנים, ולכן גם סטיית התקן לא משתנה.

תשובה: ממוצע של 21 דקות, וסטיית תקן של כ־2.83 דקות.

סעיף ד

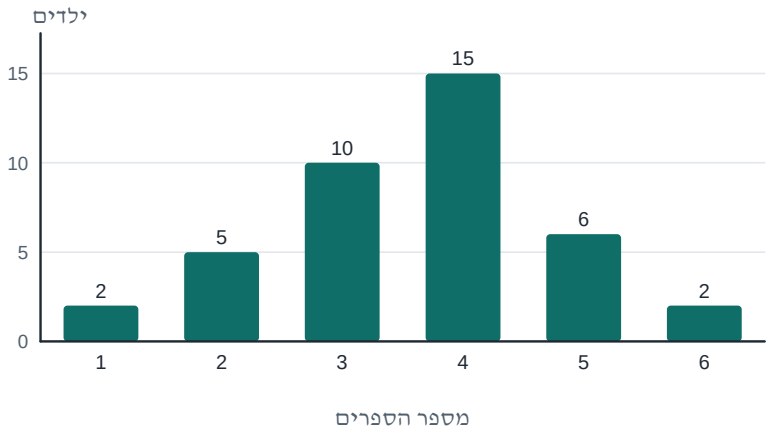
כאן $n = 11$, ולכן $n + 1 = 12$. הרבעון הראשון נמצא במקום $12 \div 4 = 3$, והרבעון השלישי נמצא במקום $3 \cdot 12 \div 4 = 9$. העשירון התשיעי נמצא במקום $9 \cdot 12 \div 10 = 10.8$, והחלק השלם של מספר זה הוא 10, ולכן:

$$\frac{90 + 97}{2} = 93.5$$

תשובה: הרבעון הראשון הוא 62, הרבעון השלישי הוא 85, והעשירון התשיעי הוא 93.5.

תרגיל 10 שאלה ברמת בגרות: תוכנית קריאה בקיץ

במסגרת תוכנית קריאה בקיץ נרשם מספר הספרים שקרא כל ילד. הדיאגרמה מתארת את התפלגות מספר הספרים בסבב הראשון של התוכנית.



הסבב הראשון של תוכנית הקריאה

א. (1) כמה ילדים השתתפו בסבב הראשון? (2) מצאו את ממוצע הספרים לילד. (3) מצאו את החציון.

ב. בסבב השני השתתפו 75% ממספר הילדים שהשתתפו בסבב הראשון. כמה ילדים השתתפו בסבב השני?

ג. הטבלה מתארת את התפלגות מספר הספרים בסבב השני. השלימו את מספר הילדים שקראו x ספרים.

מספר הספרים	2	3	x	6
מספר הילדים	6	10		5

ד. נתון שממוצע הספרים לילד בסבב השני שווה לממוצע בסבב הראשון. מצאו את x.

ה. מצאו את החציון בסבב השני. מה אפשר ללמוד מהשוואת הממוצע והחציון בשני הסבבים?

ו. נועם השתתף בסבב הראשון אבל לא בסבב השני. הוא טוען: «אילו השתתפתי בסבב השני וקראתי בו 3 ספרים, הממוצע בסבב השני היה גדל». האם טענתו נכונה? נמקו.

מה מתרגלים: שאלה מלאה: דיאגרמה לטבלה, ממוצע וחציון, אחוז, משוואה עם ערך לא ידוע, השוואה ונימוק

© אור בן שטרית · אינסוף

פתרון מלא

סעיף א

x	1	2	3	4	5	6	סך הכול
f	2	5	10	15	6	2	40
$x\cdot f$	2	10	30	60	30	12	144

$$\bar{x}=\frac{144}{40}=3.6$$

החציון: מקומות 20 ו־21. השכיחויות המצטברות הן 2, 7, 17, 32, ולכן בשני המקומות הערך הוא 4.

תשובה: (1) 40 ילדים. (2) 3.6 ספרים לילד. (3) החציון הוא 4.

סעיף ב

$$40\cdot 0.75=30$$

תשובה: 30 ילדים.

סעיף ג

$$30-6-10-5=9$$

תשובה: 9 ילדים.

סעיף ד

$$\frac{2\cdot 6+3\cdot 10+9x+6\cdot 5}{30}=3.6 \quad\rightarrow\quad 72+9x=108 \quad\rightarrow\quad x=4$$

תשובה: $x=4$.

סעיף ה

בסבב השני $N=30$, ולכן מסתכלים על המקומות 15 ו־16. השכיחויות המצטברות הן 6, 16, ולכן בשני המקומות הערך הוא 3.

תשובה: החציון הוא 3. הממוצעים שווים והחציונים שונים: בסבב השני יותר ילדים קראו מעט ספרים, וכמה ילדים שקראו הרבה מעלים את הממוצע.

סעיף ו

הערך 3 קטן מהממוצע 3.6, ולכן הוספתו מקטינה את הממוצע:

$$\frac{108+3}{31}=\frac{111}{31}\approx 3.58<3.6$$

תשובה: הטענה אינה נכונה: הממוצע היה קטן.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ.

תרגיל מודרך 1 ממוצע משוקלל מטבלה

בסקר נשאלו תלמידים כמה פעמים ביקרו בשבוע האחרון בחדר הכושר.

מספר הביקורים	1	2	3	4	5
מספר התלמידים	3	7	6	3	1

השלימו את הפתרון

מספר התלמידים: $N = 3 + 7 + 6 + 3 + 1 =$ _____.

הסכום: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 =$ _____.

הממוצע: $\bar{x} =$ _____ ביקורים.

החציון: המקומות _____ ו־_____. השכיחויות המצטברות הן 3, 10, 16, 19, 20, ולכן החציון הוא _____.

השכיח הוא _____.

מה מתרגלים: ממוצע משוקלל, מקום החציון, שכיח

תרגיל מודרך 2 ציון דרוש במבחן

ממוצע ציוניו של אור ב־4 מבחנים הוא 78. איזה ציון הוא צריך במבחן החמישי כדי שהממוצע יהיה 80?

השלימו את הפתרון

סכום הציונים עכשיו: $78 \cdot 4 =$ _____.

הסכום הדרוש ב־5 מבחנים: $80 \cdot 5 =$ _____.

הציון הדרוש: _____.

מה מתרגלים: מעבר מממוצע לסכום

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל מודרך 3 x בטבלה

בטבלת שכיחויות הערכים הם 5, 10 ו־15, והשכיחויות שלהם הן 4, x ו־6. הממוצע הוא 10.5. מצאו את x.

השלימו את הפתרון

מספר הנבדקים: $N =$ _____.

הסכום: $5 \cdot 4 + 10x + 15 \cdot 6 =$ _____.

המשוואה: $10.5(10 + x) =$ _____.

פותרים: $x =$ _____.

בדיקה: $N = 20$, הסכום הוא _____, והממוצע הוא _____.

מה מתרגלים: משוואה עם שכיחות לא ידועה, בדיקה

מצאו את הטעות 1 ממוצע בלי שכיחויות

בטבלה הערכים הם 2, 4 ו־6, והשכיחויות שלהם הן 10, 5 ו־5. מצאו את הממוצע.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 יש שלושה ערכים בטבלה.

שורה 2 $\bar{x} = (2 + 4 + 6) \div 3$

שורה 3 $\bar{x} = 4$

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ממוצע משוקלל

מצאו את הטעות 2 חציון בלי מיון

מצאו את החציון של הנתונים 5, 1, 9, 3, 7.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 יש 5 ערכים, ולכן החציון נמצא במקום 3.

שורה 2 הערך השלישי ברשימה הוא 9.

שורה 3 החציון הוא 9.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: מיון לפני מציאת חציון

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 3 שכיח ושכיחות

בטבלה הערכים הם 36, 37, 38 ו־39, והשכיחויות שלהם הן 5, 12, 8 ו־3. מהו השכיח?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 השכיחות הגדולה ביותר בטבלה היא 12.

שורה 2 השכיח הוא 12.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ההבדל בין ערך לשכיחות

מצאו את הטעות 4 ממוצע של ממוצעים

בקבוצה אחת יש 10 שחקנים עם ממוצע גובה של 190 סנטימטרים, ובקבוצה שנייה יש 30 שחקנים עם ממוצע גובה של 170 סנטימטרים. מהו ממוצע הגובה של כל השחקנים?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 יש שתי קבוצות.

שורה 2 $\bar{x} = (190 + 170) \div 2$

שורה 3 $\bar{x} = 180$ סנטימטרים

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

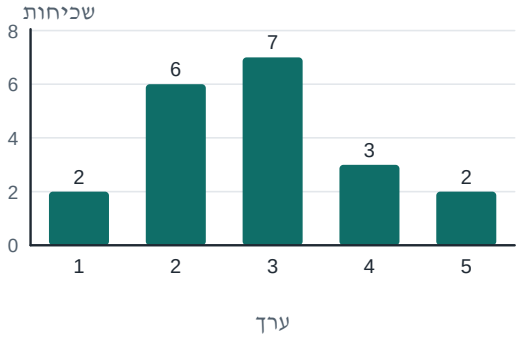
ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ממוצע משותף של קבוצות בגדלים שונים

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול עצמאי מדדים, טבלאות ודיאגרמות

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. מצאו את הממוצע, את החציון ואת השכיח של הנתונים 3, 9, 5, 9, 7, 4, 9, 6.
2. בטבלה הערכים הם 1, 2, 3 ו־4, והשכיחויות שלהם הן 5, 9, 4 ו־2. מצאו את שלושת המדדים.
3. 

מצאו את הממוצע, את החציון ואת השכיח לפי הדיאגרמה.
4. בסקר השתתפו 60 נבדקים. בדיאגרמת עיגול יש שלושה סקטורים: 50%, 30% ו־20%. מצאו את מספר הנבדקים ואת הזווית של כל סקטור.
5. הממוצע של 6 מספרים הוא 15. מסירים מהם את המספר 10. מהו ממוצע המספרים הנותרים?
6. הממוצע של 5 מספרים הוא 12. מוסיפים מספר, והממוצע של 6 המספרים הוא 13. מהו המספר שהוסיפו?
7. בטבלה הערכים הם 2, 4 ו־6, והשכיחויות שלהם הן 3, x ו־5. הממוצע הוא 4.25. מצאו את x.
8. בכיתה אחת 15 תלמידים עם ממוצע 84, ובכיתה אחרת 25 תלמידים עם ממוצע 76. מצאו את הממוצע של כל התלמידים.
9. ממוצע המשכורות בחברה הוא 9,000 שקלים, והחציון הוא 8,000 שקלים. כל העובדים קיבלו העלאה של 10%. מהם הממוצע והחציון החדשים?
10. הממוצע של 10 ערכים הוא 30. מה קורה לממוצע אם מוסיפים (א) את הערך 25; (ב) את הערך 30; (ג) את הערך 41?
11. מצאו את סטיית התקן של הנתונים 2, 4, 6, 8.
12. נתונה רשימה ממוינת: 3, 5, 8, 9, 12, 14, 20. מצאו את הרבעון הראשון ואת הרבעון השלישי.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. במכון כושר יש ארבעה סוגי שיעורים. מחיריהם 30, 40, 55 ו־70 שקלים, ומספרי המשתתפים ביום מסוים היו 10, 15, 20 ו־5 בהתאמה. (א) מצאו את מספר המשתתפים ואת המחיר הממוצע. (ב) נוספו 4 משתתפים. מהו המחיר הממוצע הגדול ביותר האפשרי? (ג) ידוע שארבעתם בחרו באותו סוג שיעור, והממוצע עלה. האם ייתכן שבחרו בשיעור של 40 שקלים? ובשיעור של 70 שקלים בהנחה של 25%?

14. בסקר השתתפו 200 תלמידים. 40% מהם לומדים שעה אחת ביום, 35% לומדים שעתיים, והשאר לומדים 3 שעות. מצאו את מספר שעות הלימוד הממוצע ואת החציון.

15. הממוצע של 5 ערכים הוא 10, והחציון הוא 9. מוסיפים 10 לערך הגדול ביותר. מהם הממוצע והחציון החדשים?

16. נכון או לא נכון? נמקו. (א) הממוצע הוא תמיד אחד הערכים ברשימה. (ב) אם כל הערכים שווים, סטיית התקן היא 0. (ג) ייתכן שהממוצע גדול מכל הערכים ברשימה. (ד) החציון תמיד נמצא בין הערך הקטן ביותר לגדול ביותר.

17. בקבוצה א הערכים הם 60, 80 ו־100, והשכיחויות שלהם הן 5, 10 ו־5. בקבוצה ב הערכים הם x, 70 ו־90, והשכיחויות שלהם הן 8, 8 ו־4. לשתי הקבוצות אותו ממוצע. מצאו את x.

© אור בן שטרית · אינסוף

13. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

5. חשבו קודם את הסכום של 6 המספרים.

7. המכנה הוא $x + 8$.

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

20; 52; 2.6; המקומות 10 ו־11; בשני המקומות הערכים הם 2 ו־3, ולכן החציון הוא 2.5; השכיח הוא 2.

תרגיל מודרך 2

312; 400; $400 - 312 = 88$.

תרגיל מודרך 3

$x + 10$; $10x + 110$; $10x + 110$; $x = 10$; הסכום 210, הממוצע 10.5.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: לא התחשבו בשכיחויות. נכון: $(2 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5) \div 20 = 70 \div 20 = 3.5$. הערך 2 שכיח יותר, ולכן הממוצע קטן מ־4.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: לא מיינו את הנתונים. אחרי המיון מתקבלת הרשימה 1, 3, 5, 7, 9, והחציון הוא 5.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: השכיח הוא הערך ולא השכיחות. השכיחות הגדולה ביותר, 12, שייכת לערך 37, ולכן השכיח הוא 37.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 2: הקבוצות אינן באותו גודל. נכון: $(10 \cdot 190 + 30 \cdot 170) \div 40 = 7{,}000 \div 40 = 175$ סנטימטרים.

תשובות לתרגול העצמאי

1. ממוצע 6.5, חציון 6.5, שכיח 9.

2. $N = 20$. ממוצע 2.15, חציון 2, שכיח 2.

3. $N = 20$. ממוצע 2.85, חציון 3, שכיח 3.

4. 30, 18 ו־12 נבדקים; $180°$, $108°$ ו־$72°$.

5. $(90 - 10) \div 5 = 16$.

6. $78 - 60 = 18$.

7. $x = 8$.

8. $3{,}160 \div 40 = 79$.

9. הממוצע 9,900 שקלים, והחציון 8,800 שקלים.

10. (א) יורד לכ־29.55. (ב) לא משתנה. (ג) עולה ל־31.

11. הממוצע 5. $S = \sqrt{(20 \div 4)} = \sqrt{5} \approx 2.24$.

12. $n + 1 = 8$: הרבעון הראשון במקום 2, והוא 5. הרבעון השלישי במקום 6, והוא 14.

13. (א) 50 משתתפים, ממוצע 47 שקלים. (ב) $2{,}630 \div 54 \approx 48.70$ שקלים. (ג) לא: $47 > 40$. כן: $47 > 52.5 = 70 \cdot 0.75$.

14. הממוצע $370 \div 200 = 1.85$ שעות. החציון 2 (המקומות 100 ו־101).

15. הממוצע 12, והחציון נשאר 9.

16. (א) לא נכון: הממוצע של 1 ו־2 הוא 1.5. (ב) נכון: כל המרחקים מהממוצע הם 0. (ג) לא נכון. (ד) נכון.

17. ממוצע קבוצה א הוא 80. $8x + 920 = 1{,}600$, ולכן $x = 85$.

© אור בן שטרית · אינסוף

14. דף סיכום

המדדים

$$N = f_1 + \ldots + f_n \qquad \bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n}{N}$$

- **ממוצע:** נקודת האיזון. כל ערך משפיע עליו.
- **חציון:** אחרי מיון. N אי־זוגי: מקום $(N+1) \div 2$. זוגי: ממוצע המקומות $N \div 2$ ו־$N \div 2 + 1$.
- **שכיח:** הערך בעל השכיחות הגדולה ביותר.

דיאגרמות

- עמודה: הערך על הציר, והגובה הוא השכיחות.
- סקטור: מספר הנבדקים הוא $N \cdot p \div 100$, והזווית היא $p \cdot 3.6$.
- הכול הופך לטבלה: x, f, $x \cdot f$.

פיזור

$$S = \sqrt{(\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N})}$$

- רבעון ה־i: מקום $i(n+1) \div 4$.
- עשירון ה־i: מקום $i(n+1) \div 10$.
- מקום לא שלם עם חלק שלם k: ממוצע המקומות k ו־$k+1$.

הכיוון ההפוך

- סכום הערכים שווה ל־$N \cdot \bar{x}$.
- ערך חסר: הסכום הדרוש פחות הסכום הקיים.
- x בטבלה: גם במכנה יש x.
- שתי קבוצות: מחברים סכומים, ומחלקים במספר הכולל.

שינוי בנתונים

- ערך חדש מעל הממוצע: הממוצע עולה. מתחתיו: יורד. שווה לו: לא משתנה.
- הוספת קבוע לכולם: הממוצע והחציון גדלים בו, וסטיית התקן לא משתנה.
- כפל של כולם בקבוע: כל המדדים מוכפלים בו.
- הממוצע הגדול ביותר: כולם בוחרים את היקר ביותר.
- בהנחה: מחשבים קודם את המחיר החדש.

מלכודות

- ממוצע בלי שכיחויות, או חילוק במספר השורות.
- השכיח הוא הערך, לא השכיחות.
- חציון בלי מיון.
- אחרי הוספת ערכים גם N גדל.

© אור בן שטרית · אינסוף