אינסוף
מתמטיקה

אשכול חברה ומדע ואשכול פיננסי כלכלי · מתמטיקה 3 יחידות לימוד · שאלון 35371

תהליכים מעריכיים: גדילה ודעיכה

מדריך למורה ולתלמיד: הסברים, נימוקים, אינטואיציה, טיפים, 10 תרגילי דוגמה עם פתרון מלא ותרגול עם תשובות

אוכלוסייה שגדלה, חיסכון שצובר ריבית, תרופה שנעלמת מהדם ומכונית שמאבדת מערכה: בכולם הכמות מוכפלת בכל יחידת זמן באותו מספר. **תלמיד** ילמד כאן לזהות תהליך כזה ולפתור כל סעיף שנשאל עליו בבגרות. **מורה** ימצא מסגרות «למורה», מפה של הנושא בבחינות 2024–2026 ורצף הוראה.

תוכן העניינים

1. איך השאלה נראית בבגרות **2**

2. הרעיון: כפל קבוע בכל יחידת זמן **3**

3. הנוסחה: מה מסמלת כל אות **4**

4. מציאת כמות: קדימה ואחורה בזמן **5**

5. מציאת האחוז משני ערכים **6**

6. מציאת הזמן: ניסוי וטעייה **7**

7. גרפים וטבלאות **8**

8. השוואה בין שני תהליכים **9**

9. טיפים וטריקים **9**

10. טעויות נפוצות **10**

11. למורה: רצף הוראה מוצע **11**

12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא **12**

תרגיל 1: עוקבים ברשת חברתית 12

תרגיל 2: מחשב שמאבד מערכו 13

תרגיל 3: עצים ביער: קדימה ואחורה 14

תרגיל 4: מנויים לשירות מוזיקה: מציאת האחוז 15

תרגיל 5: תרופה בדם: מעריכי או לינארי? 16

תרגיל 6: כרטיסים מודפסים ודיגיטליים: שני גרפים 18

תרגיל 7: האם החיסכון מספיק? 19

תרגיל 8: חומר רדיואקטיבי: יחידת זמן שאינה שנה 20

תרגיל 9: השלמת טבלה ועקיפה 22

תרגיל 10: שאלה ברמת בגרות: אופניים וקורקינטים 23

13. תרגול נוסף **25**

14. תשובות ורמזים **30**

15. דף סיכום **31**

© אור בן שטרית · אינסוף

1. איך השאלה נראית בבגרות

בכל מועד של שאלון 35371 יש שאלה אחת בתהליכים מעריכיים: לרוב זו שאלה 1, באשכול חברה ומדע, ולפעמים שאלה 5, באשכול הפיננסי כלכלי. הסיפור משתנה, אבל המבנה כמעט קבוע:

1. **כמות אחרי זמן נתון:** נתונים כמות התחלתית ואחוז קבוע, ומציבים בנוסחה.
2. **מציאת הזמן:** נתונה כמות, ומחפשים מתי הגיעו אליה. עושים זאת בניסוי וטעייה.
3. **תהליך שני:** נתונים שני ערכים בגרף או בטבלה, ומחפשים את האחוז הקבוע.
4. **השוואה:** איזו כמות גדולה יותר ובכמה, איזה אחוז גדול יותר, האם הסכום מספיק.

מועד	שאלה	הסיפור	מה נשאל
קיץ 2024 א	1	אוכלוסייה בשתי ערים	כמות אחרי זמן וכמות לפני תחילת התקופה, אחוז משני ערכים בגרף, השוואת אחוזים
קיץ 2024 ב	5	משכורות	כמות אחרי כמה שנים, מציאת הזמן, אחוז משני ערכים, השוואה
קיץ 2025 א	1	מכוניות חשמליות ומכוניות בנזין	שני גרפים נחתכים, דעיכה וגדילה, כמות שווה, אחוז, מציאת הזמן
קיץ 2025 ב	1	דרכונים	גרף מעריכי מול גרף קבוע, אחוז משני ערכים, «גדול ב־...»
קיץ 2026 א	1	אוכלוסיית בעלי חיים	קריאה מגרף, מציאת הזמן, אחוז מתוך טבלה, השלמת טבלה
קיץ 2026 ב	5	חיסכון וערך מכונית	כמות, מציאת הזמן, אחוז ירידה משני ערכים, «האם הסכום מספיק?»

מה לומדים מהטבלה

מציאת האחוז משני ערכים נדרשת בכל ששת המועדים, ומציאת הזמן בניסוי וטעייה כמעט בכולם. בכל מועד מופיעים שני תהליכים, ולכן הסעיף האחרון דורש בדרך כלל שני חישובים והשוואה ביניהם. חמש פעולות מכסות כמעט כל סעיף: הצבה קדימה בזמן, חילוק אחורה בזמן, מציאת האחוז, מציאת הזמן והשוואה.

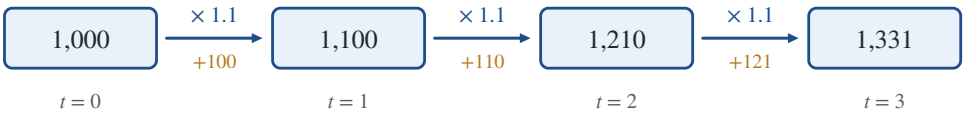
מה יש בדף הנוסחאות

בדף הנוסחאות מופיעים הנוסחה $A_t = A_0 \cdot q^t$, הקשר $q = (100 \pm p) \div 100$ וכלל החזקה $a^{-n} = 1 \div a^n$. לא צריך לזכור אותם בעל פה, אבל צריך להבין מה מסמלת כל אות, כי השאלה אף פעם לא אומרת במפורש מהו t.

© אור בן שטרית · אינסוף

2. הרעיון: כפל קבוע בכל יחידת זמן

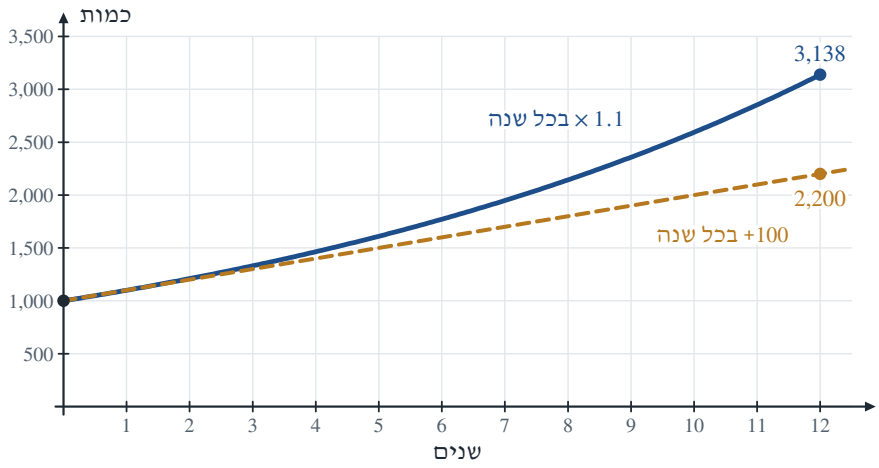
בתהליך מעריכי הכמות **מוכפלת באותו מספר** בכל יחידת זמן. המספר הזה נקרא מקדם הגדילה או מקדם הדעיכה, ומסמנים אותו באות q. כך נראה חיסכון של 1,000 שקלים שגדל ב־10% בכל שנה:



בכל שנה הכמות מוכפלת באותו מקדם, ולכן גם התוספת עצמה גדלה

בכל שנה מחשבים 10% מהסכום הנוכחי, ולכן התוספת עצמה גדלה: 100 שקלים, אחר כך 110, אחר כך 121. זה ההבדל מתהליך לינארי, שבו התוספת קבועה:

שנה	תהליך לינארי: מוסיפים 100	תהליך מעריכי: כופלים ב־1.1	התוספת בתהליך המעריכי
0	1,000	1,000	
1	1,100	1,100	100
2	1,200	1,210	110
3	1,300	1,331	121
4	1,400	1,464.1	133.1



אותה התחלה, אותו צעד ראשון: התהליך המעריכי מתרחק

אינטואיציה

תהליך לינארי הוא הליכה בצעדים שווים. תהליך מעריכי הוא כדור שלג: ככל שהוא גדול יותר, כך הוא אוסף יותר שלג בכל סיבוב. גם בדעיכה זה כך, בכיוון ההפוך: ככל שנשאר פחות, כך הירידה קטנה יותר, ולכן הכמות מתקרבת לאפס אבל לא מגיעה אליו.

למורה

כדאי לפתוח בשאלה: «מחיר עלה ב־10%, ואחר כך שוב ב־10%. האם הוא עלה ב־20%?» תנו לתלמידים לבדוק על מחיר של 100 שקלים. התוצאה, 121 שקלים, מציפה את הרעיון המרכזי: האחוז השני מחושב מהמחיר החדש. רק אחרי הדיון הזה כדאי לכתוב נוסחה.

© אור בן שטרית · אינסוף

3. הנוסחה: מה מסמלת כל אות

$$A_t = A_0 \cdot q^t$$

האות	המשמעות	בחיסכון שלמעלה
A_0	הכמות ההתחלתית, כלומר הכמות ברגע $t = 0$	1,000 שקלים
q	המקדם: המספר שבו מוכפלת הכמות בכל יחידת זמן	1.1
t	מספר יחידות הזמן שעברו	3 שנים
A_t	הכמות כעבור t יחידות זמן	1,331 שקלים

נימוק: למה יש כאן חזקה?

כופלים ב־q בכל יחידת זמן, פעם אחר פעם:

$$A_1 = A_0 \cdot q$$

$$A_2 = A_1 \cdot q = A_0 \cdot q^2$$

$$A_3 = A_2 \cdot q = A_0 \cdot q^3$$

כל יחידת זמן מוסיפה עוד גורם של q. אחרי t יחידות זמן יש t גורמים כאלה, כלומר q^t.

מאחוז למקדם

גדילה ב־p אחוזים

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

דעיכה ב־p אחוזים

$$q = \frac{100 - p}{100}$$

נימוק: למה הכפלה ב־1.06 היא תוספת של 6%?

אם לכמות A מוסיפים 6% ממנה, מקבלים:

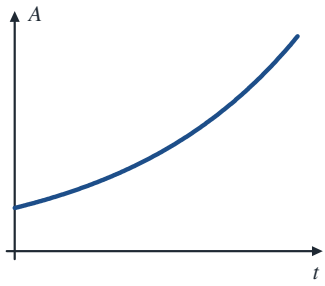
$$A + 0.06 \cdot A = A \cdot (1 + 0.06) = A \cdot 1.06$$

ואם מורידים ממנה 6%, מקבלים $A - 0.06 \cdot A = A \cdot 0.94$. במילים אחרות: אחרי ירידה ב־6% נשארים 94% מהכמות.

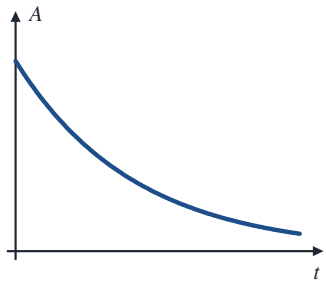
השינוי	q	השינוי	q
עלייה ב־6%	1.06	ירידה ב־6%	0.94
עלייה ב־25%	1.25	ירידה ב־25%	0.75
עלייה ב־0.5%	1.005	ירידה ב־0.5%	0.995
הכפלה (עלייה ב־100%)	2	ירידה בחצי (ירידה ב־50%)	0.5

בכיוון ההפוך, המקדם מספר על האחוז: אם $q > 1$, הכמות גדלה ב־$(q - 1) \cdot 100$ אחוזים. אם $0 < q < 1$, הכמות קטנה ב־$(1 - q) \cdot 100$ אחוזים. לדוגמה, $q = 1.08$ פירושו עלייה ב־8%, ו־$q = 0.85$ פירושו ירידה ב־15%.

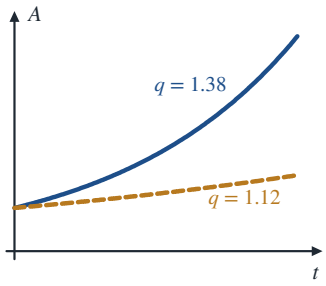
© אור בן שטרית · אינסוף



$q > 1$: גדילה



$0 < q < 1$: דעיכה



ככל ש־q גדול יותר, הגדילה מהירה יותר

טעות נפוצה

עלייה ב־6% היא לא $q = 0.06$ ולא $q = 1.6$. כפל ב־0.06 משאיר רק 6% מהכמות, וכפל ב־1.6 הוא עלייה ב־60%.

בדקו את עצמכם

מהו q של ירידה ב־30%? מהו האחוז של $q = 1.4$? (תשובות: 0.7; עלייה ב־40%.)

4. מציאת כמות: קדימה ואחורה בזמן

קדימה בזמן

זו הצבה ישירה. לדוגמה, 2,000 שקלים שגדלים ב־3% בכל שנה, כעבור 5 שנים:

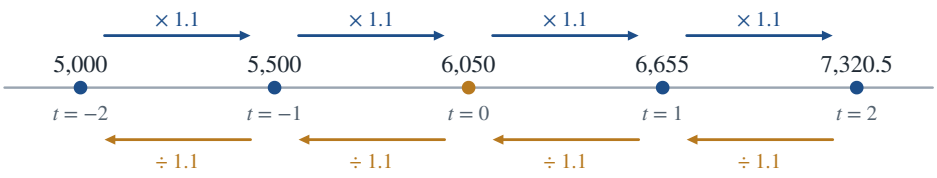
$$A_5 = 2{,}000 \cdot 1.03^5 = 2{,}000 \cdot 1.1592740743 \approx 2{,}318.55$$

סדר הפעולות חשוב: קודם מחשבים את החזקה, ורק אחר כך כופלים.

אחורה בזמן

אם $t = 0$ הוא הרגע שבו הכמות ידועה, אז שנתיים לפני כן הוא $t = -2$. בדף הנוסחאות מופיע הכלל $a^{-n} = 1 \div a^n$, ולכן ההצבה היא בעצם חילוק. לדוגמה, מספר המבקרים באתר גדל ב־10% בכל שנה, והשנה הוא 6,050. לפני שנתיים היו:

$$A_{-2} = 6{,}050 \cdot 1.1^{-2} = \frac{6{,}050}{1.1^2} = \frac{6{,}050}{1.21} = 5{,}000$$



קדימה בזמן: כופלים ב־q. אחורה בזמן: מחלקים ב־q

אינטואיציה

ללכת אחורה בזמן פירושו לבטל את הכפל. הפעולה שמבטלת כפל ב־q היא חילוק ב־q, גם בגדילה וגם בדעיכה.

© אור בן שטרית · אינסוף

טעות נפוצה

בגדילה ב־10% לא מחשבים את השנה הקודמת על ידי ירידה ב־10%. בדוגמה, $6{,}050 \cdot 0.9 = 5{,}445$ היא תשובה שגויה. הנכון הוא $6{,}050 \div 1.1 = 5{,}500$, כי ה־10% חושבו מ־5,500 ולא מ־6,050.

מציאת הכמות ההתחלתית

זה אותו רעיון. אם כמות גדלה ב־20% בכל שנה וכעבור 3 שנים היא 1,728, אז:

$$A_0 \cdot 1.2^3 = 1{,}728 \quad \rightarrow \quad A_0 = \frac{1{,}728}{1.728} = 1{,}000$$

5. מציאת האחוז משני ערכים

זה הסעיף שחוזר בכל הבחינות. נתונים שני ערכים של אותו תהליך, ומחפשים את האחוז הקבוע:

1. **מוצאים את t:** כמה יחידות זמן עברו בין שני הערכים.
2. **מציבים בנוסחה:** הערך המוקדם הוא A_0, והערך המאוחר הוא A_t.
3. **מחלקים** את הערך המאוחר במוקדם, ומקבלים את q^t.
4. **מוציאים שורש** מסדר t, ומקבלים את q.
5. **מתרגמים לאחוז,** ובודקים בהצבה.

דוגמה: שנתיים

בתחילת 2021 היו בעיר 16,000 מכשירים, ובתחילת 2023 היו בה 19,360. מספר המכשירים גדל באחוז קבוע. כאן $t = 2$:

$$16{,}000 \cdot q^2 = 19{,}360 \quad \rightarrow \quad q^2 = 1.21 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt{1.21} = 1.1$$

מספר המכשירים גדל ב־10% בכל שנה. בדיקה: $16{,}000 \cdot 1.1 \cdot 1.1 = 19{,}360$.

דוגמה: שלוש שנים

כמות ירדה מ־8,000 ל־6,859 ב־3 שנים. כאן $t = 3$:

$$8{,}000 \cdot q^3 = 6{,}859 \quad \rightarrow \quad q^3 = 0.857375 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[3]{0.857375} = 0.95$$

הכמות ירדה ב־5% בכל שנה. במחשבון מוצאים שורש שלישי במקש $\sqrt[3]{}$ או בחזקה: 0.857375^(1 ÷ 3). אם המקש לא נמצא, אפשר לנסות מקדמים ולבדוק: 0.96^3, 0.95^3.

נימוק: למה שורש ולא חילוק?

החזקה q^2 פירושה $q \cdot q$, ולא $q \cdot 2$. הפעולה שמבטלת חזקה היא שורש. אם נחלק ב־2, נקבל ב־$1.21 = q^2$ את המספר 0.605, וזה מקדם של ירידה, אף שהכמות עלתה.

אינטואיציה

כל רגע יכול לשמש $t = 0$. התהליך לא «יודע» מתי התחיל, הוא רק מכפיל. לכן אפשר למצוא את q משני ערכים כלשהם, גם אם אף אחד מהם אינו הכמות הראשונה בסיפור.

© אור בן שטרית · אינסוף

למורה

כדאי להציג לתלמידים את שתי התשובות השגויות הנפוצות זו לצד זו: $q = 1.21 \div 2$ ו־21% בשנתיים, אז 10.5% בשנה». השנייה קרובה לתשובה הנכונה, ולכן היא מסוכנת יותר. בדיקה בהצבה חושפת את שתיהן.

6. מציאת הזמן: ניסוי וטעייה

בתוכנית הלימודים של 3 יחידות אין לוגריתמים. את הזמן מוצאים בניסוי וטעייה, והזמנים בשאלות קצרים: עד חמש יחידות זמן בערך. כותבים את הערכים זה אחר זה עד שמגיעים לכמות המבוקשת.

דוגמה

בתחילת 2021 היו במאגר 7,500 ליטרים, והכמות גדלה ב־8% בכל שנה. בתחילת איזו שנה היו במאגר 9,447.84 ליטרים? ובתחילת איזו שנה הכמות עלתה לראשונה על 10,000 ליטרים?

שנה	t	החישוב	הכמות (ליטרים)
2022	1	$7{,}500 \cdot 1.08$	8,100
2023	2	$7{,}500 \cdot 1.08^2$	8,748
2024	3	$7{,}500 \cdot 1.08^3$	9,447.84
2025	4	$7{,}500 \cdot 1.08^4$	10,203.67

הערך 9,447.84 מתקבל בדיוק ב־$t = 3$, כלומר בתחילת 2024. הערך 10,000 אינו מתקבל בדיוק, אבל ב־$t = 3$ הכמות קטנה ממנו וב־$t = 4$ היא גדולה ממנו, ולכן הכמות עלתה עליו לראשונה בתחילת 2025.

בבגרות

בבחינה צריך להראות את החישוב. כשמגיעים לערך מדויק, די בהצבה אחת שמראה שהוא מתקבל. בשאלה מסוג «מתי לראשונה», כתבו שתי שורות: את השורה שלפני המעבר ואת השורה שאחריו. שתי השורות האלה הן ההוכחה.

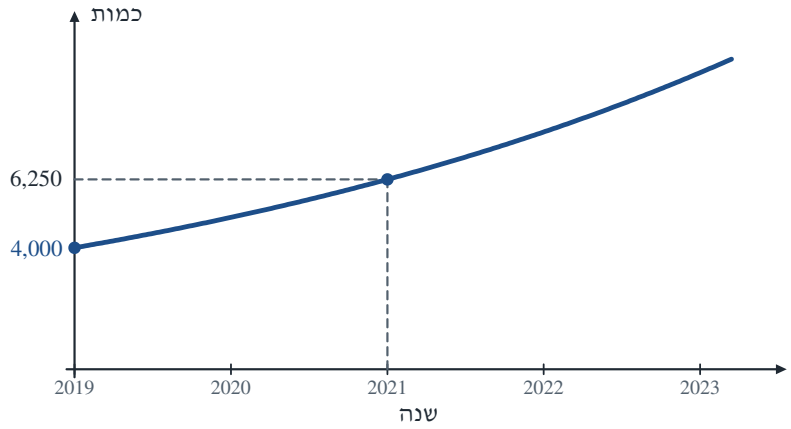
טיפ

בכל חישוב אפשר להמשיך מהתוצאה הקודמת: מקישים את הכמות ההתחלתית, ואז כופלים את התוצאה האחרונה ב־q שוב ושוב. כל לחיצה היא יחידת זמן אחת, והטבלה מתמלאת תוך שניות.

© אור בן שטרית · אינסוף

7. גרפים וטבלאות

קריאת גרף



קוראים רק את הערכים שכתובים על הגרף

- **הכיוון:** גרף עולה מתאים ל־$q > 1$, וגרף יורד מתאים ל־$0 < q < 1$.
- **הנקודה על ציר הכמות** היא הערך ברגע $t = 0$, אם ציר הזמן מתחיל שם.
- **הערכים הכתובים הם הנתונים.** הגרף בבחינה הוא סרטוט, ולא קוראים ממנו ערכים במדידה. כאן נתון שבתחילת 2019 הכמות 4,000 ובתחילת 2021 היא 6,250. לכן $t = 2$, $q^2 = 1.5625$ ו־$q = 1.25$.
- **נקודת החיתוך של שני גרפים** היא רגע שבו שתי הכמויות שוות. אפשר להשתמש בה כנתון: שתי הנוסחאות נותנות שם אותו מספר.

זיהוי תהליך מתוך טבלה

כשהשנים בטבלה עוקבות, בודקים שני דברים: מחלקים כל ערך בקודמו, ומחסירים כל ערך מקודמו.

הערכים	המנות	ההפרשים	המסקנה
500, 600, 720, 864	1.2, 1.2, 1.2	100, 120, 144	מעריכי, $q = 1.2$
500, 600, 700, 800	1.2, 1.17, 1.14	100, 100, 100	לינארי
800, 600, 450, 337.5	0.75, 0.75, 0.75	−200, −150, −112.5	מעריכי, $q = 0.75$

טעות נפוצה

אם הטבלה מדלגת על שנים, המנה בין שני ערכים סמוכים בה היא לא q. למשל, בטבלה של השנים 2020, 2022, 2024 המנה היא q^2. לפני שמחלקים, בודקים כמה יחידות זמן עברו.

למורה

תוכנית הלימודים נותנת מקום לייצוגים שונים של אותו תהליך: סיפור, טבלה, נוסחה וגרף. תרגיל שמחזק את הקשר ביניהם: כל קבוצה מקבלת ייצוג אחד של תהליך, וצריכה למצוא בכיתה את שלוש הקבוצות שיש להן את אותו תהליך בייצוגים האחרים.

© אור בן שטרית · אינסוף

8. השוואה בין שני תהליכים

בסעיף האחרון של השאלה מופיעים בדרך כלל שני תהליכים, והשאלה היא מה ההבדל ביניהם. מחשבים את שתי הכמויות **באותו רגע**, ואז עונים:

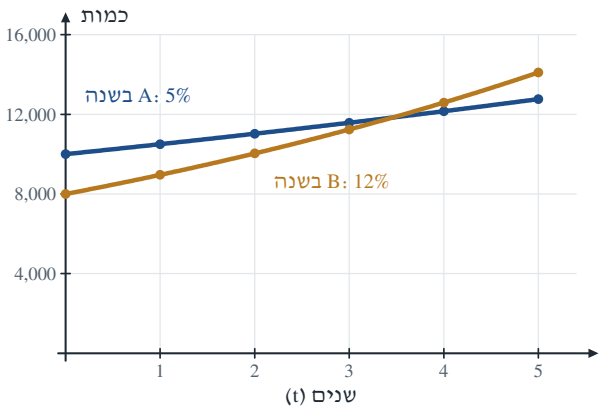
השאלה בבחינה	מה עושים
איזו כמות גדולה יותר?	מחשבים את שתיהן באותו t ומשווים.
בכמה גדולה?	מחסירים.
פי כמה גדולה?	מחלקים.
מתי הכמויות שוות?	משתמשים בנקודת החיתוך בגרף, או בונים טבלה משותפת.
מתי האחת עוקפת את השנייה?	בונים טבלה משותפת, ומחפשים את השורה הראשונה שבה סדר הכמויות מתהפך.
האם הסכום מספיק?	משווים בין החיסכון למחיר באותה שנה, וכותבים מסקנה במילים.
איזה תהליך גדל מהר יותר?	משווים את האחוזים, כלומר את המקדמים, ולא את הכמויות.

דוגמה: מי עוקף את מי?

כמות A היא 10,000 והיא גדלה ב־5% בשנה. כמות B היא 8,000 והיא גדלה ב־12% בשנה.

t	A	B
0	10,000	8,000
1	10,500	8,960
2	11,025	10,035.2
3	11,576.25	11,239.42
4	12,155.06	12,588.15

כעבור 4 שנים הכמות B גדולה לראשונה מ־A.



התחלה קטנה יותר עם מקדם גדול יותר עוקפת בסוף

אינטואיציה

היחס בין שתי הכמויות משתנה בכל שנה באותה מידה. בדוגמה, היחס $B \div A$ מוכפל בכל שנה ב־$1.05 \div 1.12$. לכן אם המקדם של B גדול יותר, הוא יעקוף בסופו של דבר, לא משנה מאיפה התחיל. ואם שתי כמויות גדלות באותו אחוז, היחס ביניהן נשאר קבוע והן לא ייפגשו.

9. טיפים וטריקים

1. **כתבו קודם את q:** לפני כל חישוב. רוב הטעויות בנושא הן במקדם, ולא בחזקה.
2. **בדיקת כיוון:** בגדילה הכמות המאוחרת גדולה מהמוקדמת, ובדעיכה היא קטנה ממנה. אם יצא אחרת, חפשו טעות ב־q או בסימן של t.
3. **כפל חוזר במחשבון:** במקום להקיש חזקה חדשה בכל פעם, כופלים את התוצאה האחרונה ב־q. כך ניסוי וטעייה מסתיים מהר.

© אור בן שטרית · אינסוף

4. **אחוז כולל:** המקדם של t יחידות זמן יחד הוא q^t. לדוגמה, $1.1^3 = 1.331$, ולכן שלוש עליות של 10% הן יחד עלייה של 33.1%.

5. **בחירה נוחה של $t = 0$:** בחרו את הרגע שבו הערך ידוע. לא חייבים להתחיל מהשנה הראשונה בשאלה.

6. **השנה עצמה אינה t:** t הוא הפרש בין שני מועדים. מתחילת 2021 עד תחילת 2025 עברו 4 שנים, ולא 5.

7. **לא מעגלים באמצע:** שומרים את q ואת החזקה בדיוק מלא, ומעגלים רק את התשובה הסופית.

8. **בדיקה בהצבה חוזרת:** מצאתם q? הציבו אותו בחזרה וודאו ש־$A_0 \cdot q^t$ נותן את הערך הנתון. זה לוקח עשר שניות וחוסך נקודות.

9. **כלל 70 לבדיקת סבירות:** כמות שגדלה ב־p אחוזים בשנה מוכפלת בערך כל $70 \div p$ שנים. לדוגמה, ב־7% בשנה יש הכפלה בערך כל 10 שנים. זו הערכה בלבד, ולא שיטה לתשובה בבחינה.

10. **עיגול לפי הסיפור:** אנשים, עצים וחיידקים מעגלים למספר שלם. כסף מעגלים לשתי ספרות אחרי הנקודה.

10. טעויות נפוצות

הטעות	למה היא קורה	התיקון
כפל במקום חזקה: $A_0 \cdot q \cdot t$	בלבול עם תהליך לינארי	כופלים ב־q בכל יחידת זמן מחדש: $A_0 \cdot q^t$.
$q = 0.06$ או $q = 1.6$ עבור עלייה ב־6%	תרגום מהיר של אחוז לעשרוני	$q = (100 + 6) \div 100 = 1.06$.
$q = 0.15$ עבור ירידה ב־15%	מתייחסים לחלק שירד ולא לחלק שנשאר	נשארים 85%, ולכן $q = 0.85$.
חיבור אחוזים: שלוש עליות של 10% הן 30%	שוכחים שהאחוז מחושב בכל פעם מכמות חדשה	$1.1^3 = 1.331$, ולכן העלייה היא 33.1%.
ירידה ב־20% ואחריה עלייה ב־20% מחזירות לכמות המקורית	אותו מספר נראה כמבטל את עצמו	$1.2 \cdot 0.8 = 0.96$: נשארים עם 96% מהכמות.
מציאת q בחילוק: $q = 1.21 \div 2$	חזקה נתפסת כאילו הייתה כפל	שורש: $q = \sqrt{1.21} = 1.1$.
אחורה בזמן בעזרת כפל ב־1.1 בדעיכה של 10%	נדמה ש«ההפך» מירידה ב־10% הוא עלייה ב־10%	מחלקים ב־q: $A \div 0.9$.
ספירת שנים כוללת: מ־2021 עד 2025 הן 5 שנים	סופרים את השנים ברשימה, ולא את המעברים ביניהן	$t = 2025 - 2021 = 4$.
חישוב $(A_0 \cdot q)^t$	מקישים במחשבון משמאל לימין בלי סוגריים	קודם מחשבים את q^t, ואחר כך כופלים ב־A_0.
עיגול של q באמצע החישוב	רצון לעבוד עם מספרים נוחים	מעגלים רק בסוף. עיגול של 1.0595 ל־1.06 יכול לשנות תשובה בעשרות שקלים.

© אור בן שטרית · אינסוף

11. למורה: רצף הוראה מוצע

תוכנית הלימודים קובעת 40 שעות לכל אשכול ואינה מחלקת אותן בין הנושאים, ולכן מספרי השעות בטבלה הם הצעה בלבד. התוכנית מדגישה ייצוגים שונים של אותו תהליך, ובמציאת הזמן היא מסתפקת בניסוי וטעייה.

שלב	שעות	מטרה	שאלה מנחה לכיתה
מכפל חוזר לתהליך	1	הבחנה בין תוספת קבועה לכפל קבוע	«מחיר עלה פעמיים ב־10%. בכמה עלה בסך הכול?»
הנוסחה והמקדם	1	A_0, q, t; תרגום אחוז למקדם ולהפך	«מה יקרה לכמות אם נכפול ב־0.06 במקום ב־1.06?»
קדימה ואחורה	1.5	הצבה, t שלילי, מציאת A_0	«איך מבטלים כפל? מה הייתה הכמות לפני שנה?»
מציאת האחוז	1.5	שורש ריבועי ושורש שלישי במחשבון	«למה לא מחלקים ב־2?»
מציאת הזמן	1	ניסוי וטעייה, «לראשונה», מעבר משנה ל־t	«איך נדע שעצרנו בזמן הנכון?»
גרפים וטבלאות	1	קריאת גרף, בדיקת מנה והפרש	«האיור הזה יכול לתאר תהליך מעריכי? למה?»
השוואה ושאלה מלאה	2	שני תהליכים, «בכמה», «האם מספיק»	«מה צריך לחשב כדי לענות, ובאיזה רגע?»

למורה: שאלת סיום קצרה לאבחון

בסוף השיעור השני אפשר לבקש מכל תלמיד לכתוב ביטוי ל«הכמות כעבור 3 שנים» בשני מקרים: עלייה ב־4% וירידה ב־4%, מכמות התחלתית של 500. מי שכותב $500 \cdot 1.04 \cdot 3$ או $500 \cdot 0.04^3$ חושף בדיוק את הטעות שצריך לטפל בה לפני שממשיכים.

© אור בן שטרית · אינסוף

12. עשרה תרגילי דוגמה עם פתרון מלא

התרגילים מסודרים מהקל אל הקשה ובנויים כמו שאלות בגרות. כל הנתונים בדיוניים. נסו לפתור כל סעיף לפני קריאת הפתרון.

תרגיל 1 עוקבים ברשת חברתית

מספר העוקבים של ערוץ מדע ברשת חברתית גדל בכל חודש ב־5%. בתחילת ינואר היו לערוץ 12,000 עוקבים.

א. מהו מקדם הגדילה החודשי?

ב. כמה עוקבים היו לערוץ כעבור חודשיים?

ג. כמה עוקבים היו לערוץ כעבור 4 חודשים?

ד. בכמה אחוזים גדל מספר העוקבים בסך הכול ב־4 החודשים?

מה מתרגלים: מעבר מאחוז למקדם, הצבה בנוסחה, אחוז כולל

פתרון מלא

סעיף א

$$q = \frac{100 + 5}{100} = 1.05$$

תשובה: מקדם הגדילה הוא 1.05.

סעיף ב

כאן $A_0 = 12{,}000$ ו־$t = 2$:

$$A_2 = 12{,}000 \cdot 1.05^2 = 12{,}000 \cdot 1.1025 = 13{,}230$$

תשובה: 13,230 עוקבים.

סעיף ג

$$A_4 = 12{,}000 \cdot 1.05^4 = 12{,}000 \cdot 1.21550625 = 14{,}586.075 \approx 14{,}586$$

מספר העוקבים הוא מספר שלם, ולכן מעגלים.

תשובה: כ־14,586 עוקבים.

סעיף ד

המקדם של 4 החודשים יחד הוא $1.05^4 = 1.21550625$, כלומר הכמות גדלה ב־21.55% בקירוב. התוצאה גדולה מ־$4 \cdot 5\% = 20\%$, כי בכל חודש האחוז מחושב מכמות גדולה יותר.

תשובה: כ־21.55%.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 2 מחשב שמאבד מערכו

מחשב נייד נקנה ב־6,000 שקלים. ערכו יורד בכל שנה ב־15%.

א. מהו מקדם הדעיכה?

ב. מה יהיה ערך המחשב כעבור 3 שנים?

ג. בכמה שקלים ירד ערך המחשב ב־3 השנים האלה?

ד. כעבור כמה שנים יהיה ערך המחשב לראשונה נמוך ממחצית מחיר הקנייה?

מה מתרגלים: דעיכה, הפרש בין כמויות, ניסוי וטעייה בשאלת «לראשונה»

פתרון מלא

סעיף א

$$q = \frac{100 - 15}{100} = 0.85$$

תשובה: מקדם הדעיכה הוא 0.85.

סעיף ב

$$A_3 = 6{,}000 \cdot 0.85^3 = 6{,}000 \cdot 0.614125 = 3{,}684.75$$

תשובה: 3,684.75 שקלים.

סעיף ג

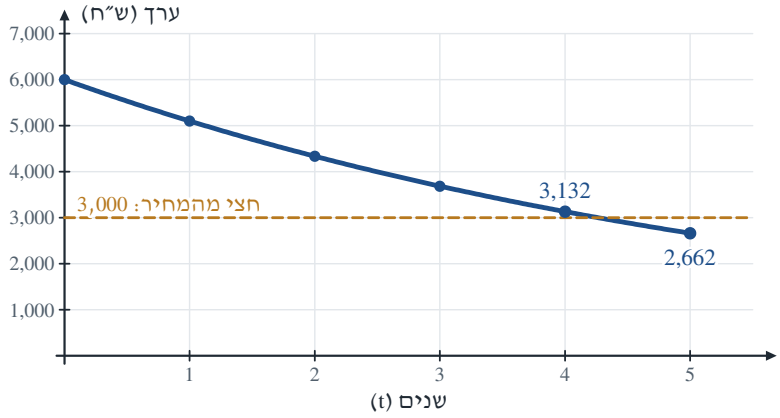
$$6{,}000 - 3{,}684.75 = 2{,}315.25$$

תשובה: הערך ירד ב־2,315.25 שקלים.

סעיף ד

מחצית מחיר הקנייה היא 3,000 שקלים. בודקים שנה אחר שנה:

t	1	2	3	4	5
A_t	5,100	4,335	3,684.75	3,132.04	2,662.23



הערך יורד לראשונה מתחת לחצי כעבור 5 שנים

כעבור 4 שנים הערך עדיין גבוה מ־3,000, וכעבור 5 שנים הוא כבר נמוך ממנו.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: כעבור 5 שנים.

תרגיל 3 עצים ביער: קדימה ואחורה

מספר העצים ביער קטן בכל שנה ב־4%. בתחילת שנת 2025 היו ביער 46,080 עצים.

א. כמה עצים יהיו ביער בתחילת שנת 2027?

ב. כמה עצים היו ביער בתחילת שנת 2024?

ג. כמה עצים היו ביער בתחילת שנת 2023?

ד. דנה טוענת: «בכל שנה יש ירידה של 4%, ולכן כדי לחזור שנה אחורה צריך להוסיף 4%. בתחילת 2024 היו אפוא $46{,}080 \cdot 1.04 = 47{,}923.2$ עצים.» הסבירו מדוע דנה טועה.

מה מתרגלים: בחירת $t = 0$, t שלילי, הסבר מילולי של טעות

פתרון מלא

המקדם הוא $q = 0.96$. נוח לבחור את תחילת 2025 כ־$t = 0$, כי זה הערך הידוע.

סעיף א

תחילת 2027 היא $t = 2$:

$$A_2 = 46{,}080 \cdot 0.96^2 = 46{,}080 \cdot 0.9216 = 42{,}467.328 \approx 42{,}467$$

תשובה: כ־42,467 עצים.

סעיף ב

תחילת 2024 היא $t = -1$:

$$A_{-1} = 46{,}080 \cdot 0.96^{-1} = \frac{46{,}080}{0.96} = 48{,}000$$

תשובה: 48,000 עצים.

סעיף ג

תחילת 2023 היא $t = -2$:

$$A_{-2} = \frac{46{,}080}{0.96^2} = \frac{46{,}080}{0.9216} = 50{,}000$$

תשובה: 50,000 עצים. בדיקה: $50{,}000 \cdot 0.96^2 = 46{,}080$.

סעיף ד

הירידה של 4% מחושבת מהכמות של תחילת 2024, ולא מהכמות של תחילת 2025. מ־48,000 עצים ירדו $48{,}000 \cdot 0.04 = 1{,}920$ עצים והגענו ל־46,080. דנה חישבה 4% מ־46,080, כלומר 1,843.2 בלבד, וזה מספר קטן מדי.

תשובה: כדי לחזור אחורה מחלקים ב־q, ולא מוסיפים את אותו אחוז.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 4 מנויים לשירות מוזיקה: מציאת האחוז

מספר המנויים לשירות מוזיקה ברשת גדל בכל שנה באחוז קבוע. בתחילת 2021 היו לשירות 40,000 מנויים, ובתחילת 2023 היו לו 48,400 מנויים.

א. בכמה אחוזים גדל מספר המנויים בכל שנה?

ב. כמה מנויים היו לשירות בתחילת 2022?

ג. כמה מנויים היו לשירות בתחילת 2020?

ד. בתחילת איזו שנה מספר המנויים עלה לראשונה על 60,000?

מה מתרגלים: q משני ערכים, שורש ריבועי, ערך ביניים, ערך לפני ההתחלה, ניסוי וטעייה

פתרון מלא

סעיף א

בין 2021 ל־2023 עברו שנתיים, ולכן $t = 2$:

$$40{,}000 \cdot q^2 = 48{,}400$$

$$q^2 = 1.21$$

$$q = \sqrt{1.21} = 1.1$$

תשובה: מספר המנויים גדל ב־10% בכל שנה.

סעיף ב

$$40{,}000 \cdot 1.1 = 44{,}000$$

תשובה: 44,000 מנויים.

סעיף ג

תחילת 2020 היא שנה אחת לפני תחילת 2021, ולכן מחלקים ב־q:

$$\frac{40{,}000}{1.1} = 36{,}363.63\ldots \approx 36{,}364$$

תשובה: כ־36,364 מנויים.

סעיף ד

ממשיכים מ־48,400 בתחילת 2023 וכופלים ב־1.1:

שנה	2024	2025	2026
מספר המנויים	53,240	58,564	64,420.4

תשובה: בתחילת 2026.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 5 תרופה בדם: מעריכי או לינארי?

בטבלה מוצגת כמות של שתי תרופות בדמו של מטופל, במיליגרם, לפי מספר השעות מאז נטילתן.

שעות (t)	0	1	2	3
תרופה א	400	320	256	204.8
תרופה ב	400	340	280	220

א. הראו שכמות תרופה א יורדת באחוז קבוע, ומצאו אותו.

ב. האם גם כמות תרופה ב יורדת באחוז קבוע? נמקו, ותארו את השינוי שלה.

ג. נניח שהתהליכים נמשכים באותו אופן. מה תהיה כמות כל תרופה כעבור 4 שעות? באיזו תרופה הכמות תהיה גדולה יותר?

ד. מנה נוספת של תרופה א ניתנת כאשר הכמות בדם יורדת לראשונה מתחת ל־150 מיליגרם. כעבור כמה שעות שלמות זה יקרה?

מה מתרגלים: זיהוי תהליך מטבלה, מנה מול הפרש, השוואה בין תהליך מעריכי ללינארי

פתרון מלא

סעיף א

מחלקים כל ערך בקודמו:

$$\frac{320}{400}=0.8 \qquad \frac{256}{320}=0.8 \qquad \frac{204.8}{256}=0.8$$

המנה קבועה, ולכן זהו תהליך מעריכי עם $q=0.8$.

תשובה: הכמות יורדת ב־20% בכל שעה.

סעיף ב

$$\frac{340}{400}=0.85 \qquad \frac{280}{340}\approx 0.824$$

המנות אינן שוות, ולכן האחוז אינו קבוע. לעומת זאת, ההפרשים קבועים: בכל שעה הכמות יורדת ב־60 מיליגרם.

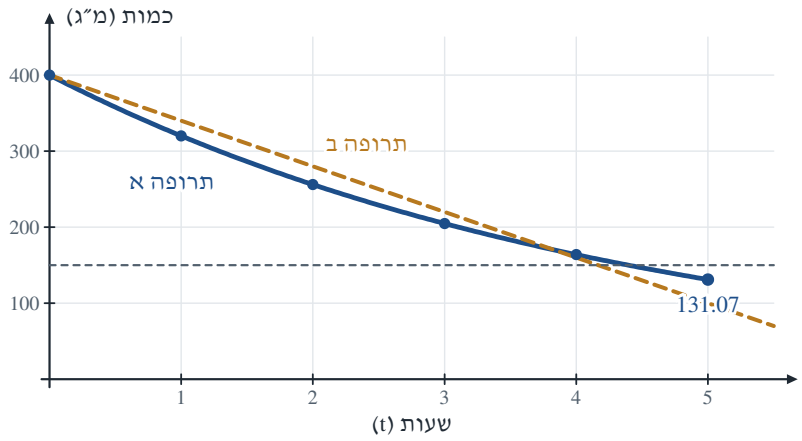
תשובה: לא. כמות תרופה ב יורדת בכמות קבועה, וזה תהליך לינארי.

סעיף ג

תרופה א: $400\cdot 0.8^4=163.84$.

תרופה ב: $220-60=160$.

© אור בן שטרית · אינסוף



בתרופה א הירידה באחוז קבוע, ובתרופה ב בכמות קבועה

תשובה: 163.84 מיליגרם של תרופה א ו־160 מיליגרם של תרופה ב. הכמות של תרופה א גדולה יותר.

שימו לב: כעבור 3 שעות דווקא תרופה ב הייתה בכמות גדולה יותר. הירידה הלינארית אינה מואטת, ואילו הירידה המעריכית הולכת וקטנה.

סעיף ד

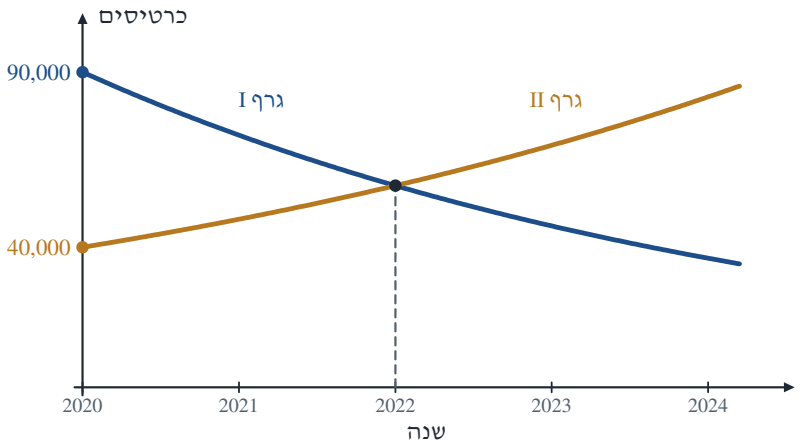
כעבור 4 שעות הכמות היא 163.84, וזה עדיין יותר מ־150. כעבור 5 שעות:

$$400 \cdot 0.8^5 = 131.072$$

תשובה: כעבור 5 שעות.

תרגיל 6 כרטיסים מודפסים ודיגיטליים: שני גרפים

במוזיאון נמכרו בשנת 2020 בסך הכול 90,000 כרטיסים מודפסים ו־40,000 כרטיסים דיגיטליים. מאז, מספר הכרטיסים המודפסים שנמכרים בשנה קטן בכל שנה ב־20%, ומספר הכרטיסים הדיגיטליים שנמכרים בשנה גדל בכל שנה ב־20%. הגרפים מתארים את שני התהליכים.



הכרטיסים שנמכרו בכל שנה

א. איזה גרף מתאר את מספר הכרטיסים המודפסים? נמקו.

ב. הראו שבשנת 2022 נמכר אותו מספר של כרטיסים מכל סוג, ומצאו מספר זה.

ג. כמה כרטיסים נמכרו בסך הכול בשנת 2024?

ד. באיזו שנה מספר הכרטיסים הדיגיטליים היה לראשונה גדול ביותר מ־40,000 ממספר הכרטיסים המודפסים?

מה מתרגלים: התאמת גרף לסיפור, שוויון בנקודת חיתוך, טבלה משותפת, הפרש

פתרון מלא

סעיף א

מספר הכרטיסים המודפסים יורד ומתחיל ב־90,000. גרף I יורד ומתחיל בערך זה.

תשובה: גרף I.

סעיף ב

בוחרים $t=0$ בשנת 2020, ולכן שנת 2022 היא $t=2$:

$$90{,}000\cdot 0.8^2 = 90{,}000\cdot 0.64 = 57{,}600$$

$$40{,}000\cdot 1.2^2 = 40{,}000\cdot 1.44 = 57{,}600$$

תשובה: בשנת 2022 נמכרו 57,600 כרטיסים מכל סוג.

סעיף ג

שנת 2024 היא $t=4$:

© אור בן שטרית · אינסוף

$$90{,}000 \cdot 0.8^4 = 36{,}864$$

$$40{,}000 \cdot 1.2^4 = 82{,}944$$

$$36{,}864 + 82{,}944 = 119{,}808$$

תשובה: 119,808 כרטיסים.

סעיף ד

שנה	מודפסים	דיגיטליים	ההפרש
2022	57,600	57,600	0
2023	46,080	69,120	23,040
2024	36,864	82,944	46,080

תשובה: בשנת 2024.

תרגיל 7 האם החיסכון מספיק?

בתחילת 2024 הפקיד יובל 30,000 שקלים בתוכנית חיסכון, והסכום גדל בכל שנה ב־5%. יובל רוצה לקנות ציוד לאולפן הקלטות. מחיר הציוד יורד בכל שנה באחוז קבוע: בתחילת 2024 הוא היה 40,000 שקלים, ובתחילת 2026 הוא היה 33,856 שקלים.

א. בכמה אחוזים יורד מחיר הציוד בכל שנה?

ב. האם בתחילת 2026 היה בחיסכון די כסף לקניית הציוד? נמקו.

ג. בתחילת איזו שנה יהיה בחיסכון לראשונה די כסף לקניית הציוד?

ד. כמה כסף יישאר ליובל אם יקנה את הציוד בתחילת אותה שנה?

מה מתרגלים: שני תהליכים בכיוונים הפוכים, מציאת אחוז ירידה, נימוק והסקת מסקנה

פתרון מלא

סעיף א

$$40{,}000 \cdot q^2 = 33{,}856$$

$$q^2 = 0.8464$$

$$q = \sqrt{0.8464} = 0.92$$

תשובה: מחיר הציוד יורד ב־8% בכל שנה.

סעיף ב

$$30{,}000 \cdot 1.05^2 = 30{,}000 \cdot 1.1025 = 33{,}075$$

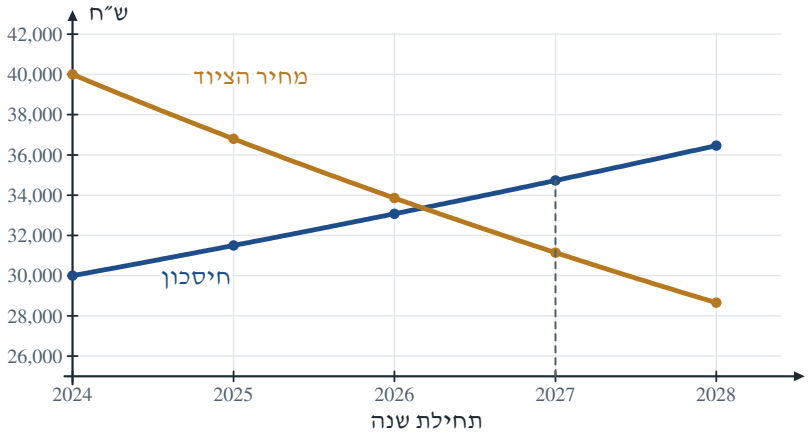
החיסכון קטן מהמחיר: $33{,}075 < 33{,}856$.

תשובה: לא. חסרים 781 שקלים.

סעיף ג

החיסכון רק גדל והמחיר רק יורד. לכן אם בתחילת 2026 לא היה די כסף, גם קודם לכן לא היה. בודקים את תחילת 2027, כלומר $t = 3$:

החיסכון: $30{,}000 \cdot 1.05^3 = 34{,}728.75$. המחיר: $40{,}000 \cdot 0.92^3 = 31{,}147.52$. החיסכון גדול מהמחיר.



החיסכון מכסה לראשונה את המחיר בתחילת 2027

תשובה: בתחילת 2027.

סעיף ד

$$34{,}728.75 - 31{,}147.52 = 3{,}581.23$$

תשובה: יישארו ליובל 3,581.23 שקלים.

תרגיל 8 חומר רדיואקטיבי: יחידת זמן שאינה שנה

כמות של חומר רדיואקטיבי במעבדה קטנה בחצי בכל 6 ימים. בתחילת ניסוי היו במעבדה 640 מיליגרם מהחומר.

א. מהו המקדם, ומהי יחידת הזמן המתאימה לו?

ב. כמה מיליגרם מהחומר יישארו כעבור 18 ימים?

ג. כעבור כמה ימים יישארו 20 מיליגרם מהחומר?

ד. כמה מיליגרם מהחומר היו במעבדה 12 ימים לפני תחילת הניסוי?

ה. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל 12 ימים?

מה מתרגלים: זיהוי יחידת הזמן, המרה מימים ל־t, t חיובי ושלילי

פתרון מלא

סעיף א

הכמות מוכפלת ב־0.5 בכל פרק זמן של 6 ימים, ולא בכל יום.

תשובה: $q = 0.5$, ויחידת הזמן היא 6 ימים.

סעיף ב

ב־18 ימים יש 3 יחידות זמן של 6 ימים, ולכן $t = 3$, ולא 18:

© אור בן שטרית · אינסוף

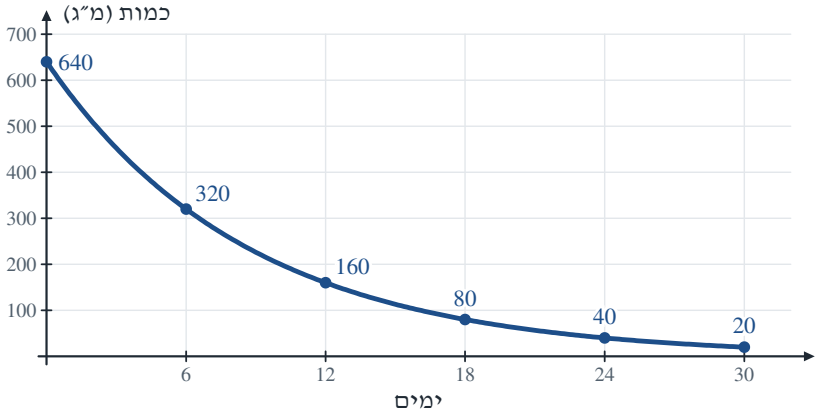
$$A_3 = 640 \cdot 0.5^3 = 640 \cdot 0.125 = 80$$

תשובה: 80 מיליגרם.

סעיף ג

בונים רשימה: $20, 40, 80, 160, 320$. הערך 20 מתקבל ב־$t = 5$.

$$640 \cdot 0.5^5 = 20$$



חצי מהכמות נעלם בכל 6 ימים, ולכן יחידת זמן אחת היא 6 ימים

יחידת זמן אחת היא 6 ימים, ולכן $5 \cdot 6 = 30$.

תשובה: כעבור 30 ימים.

סעיף ד

12 ימים לפני ההתחלה הם 2 יחידות זמן אחורה, כלומר $t = -2$:

$$A_{-2} = \frac{640}{0.5^2} = \frac{640}{0.25} = 2{,}560$$

תשובה: 2,560 מיליגרם.

סעיף ה

12 ימים הם 2 יחידות זמן, ולכן המקדם שלהם הוא $0.5^2 = 0.25$. נשאר רבע מהכמות, כלומר היא קטנה ב־75%.

תשובה: ב־75%.

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל 9 השלמת טבלה ועקיפה

מספר הלומדים בקורס מקוון גדל בכל שנה באחוז קבוע. בטבלה מוצג מספר הלומדים בתחילת כמה שנים.

שנה	2019	2020	2021	2022	2023
מספר הלומדים		11,000		13,310	

א. מצאו בכמה אחוזים גדל מספר הלומדים בכל שנה.

ב. השלימו את הערכים החסרים בטבלה.

ג. בתחילת איזו שנה מספר הלומדים עלה לראשונה על 17,000?

ד. בקורס מקוון אחר היו בתחילת 2019 בסך הכול 8,000 לומדים, ומספר הלומדים בו גדל בכל שנה ב־25%. בתחילת איזו שנה מספר הלומדים בקורס זה היה לראשונה גדול ממספר הלומדים בקורס הראשון?

מה מתרגלים: אחוז משני ערכים לא עוקבים, השלמת טבלה קדימה ואחורה, טבלה משותפת

פתרון מלא

סעיף א

בין 2020 ל־2022 עברו שנתיים:

$$11{,}000 \cdot q^2 = 13{,}310$$

$$q^2 = 1.21$$

$$q = 1.1$$

תשובה: מספר הלומדים גדל ב־10% בכל שנה.

סעיף ב

$$2019:\ 11{,}000 \div 1.1 = 10{,}000$$

$$2021:\ 11{,}000 \cdot 1.1 = 12{,}100$$

$$2023:\ 13{,}310 \cdot 1.1 = 14{,}641$$

תשובה: 2019: 10,000. 2021: 12,100. 2023: 14,641.

סעיף ג

ממשיכים לכפול ב־1.1: בתחילת 2024 היו 16,105.1 לומדים, ובתחילת 2025 היו 17,715.61 לומדים. המספרים אינם שלמים, כי זהו מודל, וכאן הדבר אינו משפיע על התשובה.

תשובה: בתחילת 2025.

סעיף ד

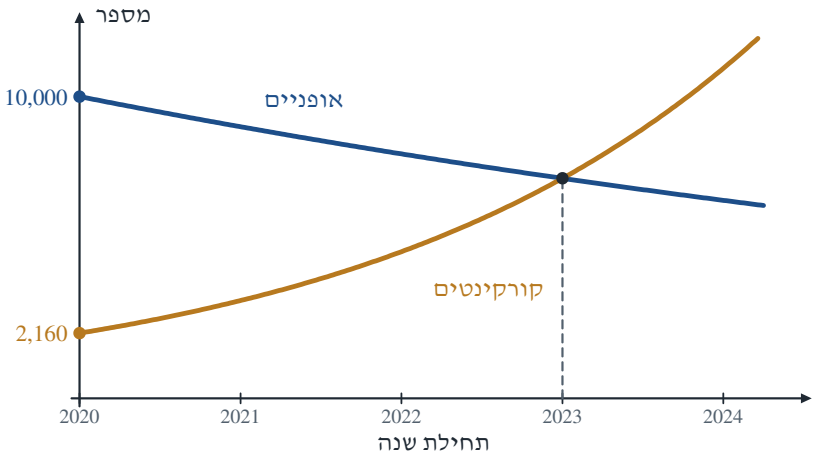
שנה	2019	2020	2021
הקורס הראשון	10,000	11,000	12,100
הקורס האחר	8,000	10,000	12,500

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובה: בתחילת 2021.

תרגיל 10 שאלה ברמת בגרות: אופניים וקורקינטים

בתחילת 2020 היו בעיר מסוימת 10,000 אופניים, ומספרם קטן בכל שנה ב־10%. מספר הקורקינטים החשמליים בעיר גדל בכל שנה באחוז קבוע. בגרף מתוארים שני התהליכים. הגרפים נחתכים בנקודה שמתאימה לתחילת 2023.



אופניים וקורקינטים בעיר

א. (1) כמה אופניים היו בעיר בתחילת 2023? (2) מצאו בכמה אחוזים גדל מספר הקורקינטים בכל שנה.

ב. כמה קורקינטים היו בעיר בתחילת 2022? וכמה היו בתחילת 2019?

ג. בתחילת איזו שנה מספר הקורקינטים היה גדול ב־4,374 ממספר האופניים?

ד. עיריית העיר קבעה: «בתחילת 2025 יהיו בעיר לפחות 15,000 קורקינטים». אם התהליך יימשך באותו אופן, האם היעד יושג? נמקו.

ה. פי כמה גדל מספר הקורקינטים בין תחילת 2020 לתחילת 2024?

מה מתרגלים: שאלה מלאה: קריאה מגרף, שוויון בחיתוך, שורש שלישי, t שלילי, הפרש, יעד ומקדם כולל

פתרון מלא

סעיף א

(1) תחילת 2023 היא $t = 3$, והמקדם של האופניים הוא 0.9:

$$10{,}000 \cdot 0.9^3 = 10{,}000 \cdot 0.729 = 7{,}290$$

תשובה: 7,290 אופניים.

(2) בנקודת החיתוך שתי הכמויות שוות, ולכן גם מספר הקורקינטים בתחילת 2023 הוא 7,290. מהגרף, בתחילת 2020 היו 2,160 קורקינטים:

$$2{,}160 \cdot q^3 = 7{,}290$$

$$q^3 = 3.375$$

$$q = \sqrt[3]{3.375} = 1.5$$

תשובה: מספר הקורקינטים גדל ב־50% בכל שנה.

© אור בן שטרית · אינסוף

סעיף ב

תחילת 2022 היא $t = 2$, ותחילת 2019 היא $t = -1$:

$$\frac{2{,}160}{1.5} = 1{,}440 \qquad 2{,}160 \cdot 1.5^{2} = 4{,}860$$

תשובה: 4,860 קורקינטים בתחילת 2022 ו־1,440 קורקינטים בתחילת 2019.

סעיף ג

רק אחרי 2023 מספר הקורקינטים גדול ממספר האופניים. לכן בודקים מ־2024:

$$10{,}000 \cdot 0.9^{4} = 6{,}561 \qquad 2{,}160 \cdot 1.5^{4} = 10{,}935$$

$$10{,}935 - 6{,}561 = 4{,}374$$

תשובה: בתחילת 2024.

סעיף ד

תחילת 2025 היא $t = 5$:

$$2{,}160 \cdot 1.5^{5} = 16{,}402.5$$

מתקבל מספר גדול מ־15,000.

תשובה: כן, היעד יושג: יהיו בעיר כ־16,400 קורקינטים.

סעיף ה

בין 2020 ל־2024 עברו 4 שנים, ולכן המקדם הכולל הוא:

$$1.5^{4} = 5.0625$$

בדיקה: $10{,}935 \div 2{,}160 = 5.0625$.

תשובה: פי 5.0625, כלומר קצת יותר מפי 5.

© אור בן שטרית · אינסוף

13. תרגול נוסף

תחילה שלושה תרגילים מודרכים, אחריהם ארבעה פתרונות עם טעות, ובסוף תרגול עצמאי. כל התשובות מרוכזות בסוף הקובץ.

תרגיל מודרך 1 אחוז משני ערכים לאורך 3 שנים

ערך של קרן השקעות גדל באחוז קבוע בכל שנה. הוא עלה מ־20,000 שקלים ל־23,152.5 שקלים ב־3 שנים. מה יהיה ערך הקרן כעבור שנה נוספת?

השלימו את הפתרון

מציבים בנוסחה: $20{,}000 \cdot q$ ___ $= 23{,}152.5$.

מחלקים ב־20,000: $q^3 =$ _____.

מוציאים שורש שלישי: $q =$ _____, ולכן הערך גדל בכל שנה ב־ _____ אחוזים.

כעבור שנה נוספת: _____ $=$ _____ $\cdot\ 23{,}152.5$ שקלים.

מה מתרגלים: q משני ערכים, שורש שלישי, המשך התהליך

תרגיל מודרך 2 ניסוי וטעייה בטבלה

מספר הציפורים בשמורה קטן בכל שנה ב־12%. בתחילת 2022 היו בשמורה 5,000 ציפורים. בתחילת איזו שנה מספר הציפורים ירד לראשונה מתחת ל־3,000?

השלימו את הפתרון

המקדם הוא _____ $= q$.

בתחילת 2023 היו _____ $= 5{,}000 \cdot q$ ציפורים.

בתחילת 2024 היו _____ ציפורים.

בתחילת 2025 היו _____ ציפורים.

בתחילת 2026 היו _____ ציפורים.

לכן מספר הציפורים ירד לראשונה מתחת ל־3,000 בתחילת _____ .

מה מתרגלים: דעיכה, ניסוי וטעייה, מעבר מ־t לשנה

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגיל מודרך 3 אחורה בזמן

שטח האצות בבריכה גדל בכל יום ב־25%. היום שטח האצות הוא 1,250 סנטימטרים רבועים. מה היה השטח לפני יומיים?

השלימו את הפתרון

בוחרים את היום כ־$t = 0$, ולכן לפני יומיים הוא $t =$ _____.

המקדם הוא $q =$ _____.

מחלקים: $1{,}250 \div 1.25^2 = 1{,}250 \div$ _____ $=$ _____.

בדיקה: $1.25^2 = 1{,}250 \cdot$ _____ .

מה מתרגלים: t שלילי, בדיקה בהצבה

מצאו את הטעות 1 חיבור אחוזים

מחיר מנוי עולה בכל שנה ב־10%. בכמה אחוזים יעלה המחיר ב־3 שנים?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 המקדם השנתי הוא $q = 1.1$.

שורה 2 בכל שנה יש עלייה של 10%, ולכן ב־3 שנים העלייה היא $3 \cdot 10\% = 30\%$.

שורה 3 המחיר יעלה ב־30%.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: ההבדל בין כפל חוזר לחיבור

מצאו את הטעות 2 חילוק במקום שורש

ערך של נכס עלה מ־8,000 שקלים ל־9,680 שקלים ב־2 שנים, באחוז קבוע בכל שנה. מצאו את האחוז.

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $q^2 = 9{,}680 \div 8{,}000 = 1.21$

שורה 2 $q = 1.21 \div 2 = 0.605$

שורה 3 הערך עולה ב־60.5% בכל שנה.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: שורש, בדיקת סבירות

© אור בן שטרית · אינסוף

מצאו את הטעות 3 אחורה בזמן בדעיכה

מספר התושבים ביישוב יורד בכל שנה ב־20%. בתחילת 2024 היו בו 400 תושבים. כמה תושבים היו בו בתחילת 2023?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 $q = 0.8$

שורה 2 לפני שנה היו יותר תושבים, ולכן מוסיפים 20%: $400 \cdot 1.2 = 480$.

שורה 3 בתחילת 2023 היו ביישוב 480 תושבים.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: חילוק ב־q, בדיקה בהצבה

מצאו את הטעות 4 ספירת שנים

בתחילת 2018 היו בחשבון 5,000 שקלים, והסכום גדל בכל שנה ב־6%. כמה כסף היה בחשבון בתחילת 2021?

הפתרון של התלמיד

שורה 1 השנים הן 2018, 2019, 2020, 2021, ולכן $t = 4$.

שורה 2 $A_4 = 5{,}000 \cdot 1.06^4 = 5{,}000 \cdot 1.26247696$

שורה 3 בחשבון היו כ־6,312.38 שקלים.

א. באיזו שורה נמצאת הטעות?

ב. הסבירו במילים מדוע זו טעות.

ג. תקנו את השורה, והשלימו את הפתרון.

מה מתרגלים: מעבר ממועדים ל־t

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול עצמאי מקדם, כמות ואחוז

מהקל אל הקשה. נסו בלי רמז, ורק אם נתקעתם פנו לעמוד התשובות.

1. רשמו את המקדם q: (א) עלייה ב־7%; (ב) ירידה ב־7%; (ג) עלייה ב־0.5%; (ד) ירידה ב־35%; (ה) הכמות גדלה פי 3 בכל יחידת זמן.
2. נתון המקדם. בכמה אחוזים משתנה הכמות בכל יחידת זמן? (א) $q = 1.35$; (ב) $q = 0.72$; (ג) $q = 0.995$; (ד) $q = 2.1$.
3. בתרבית היו בתחילת ניסוי 2,500 חיידקים, ומספרם גדל בכל שעה ב־8%. כמה חיידקים היו בה כעבור 3 שעות?
4. מכונית חדשה נקנתה ב־120,000 שקלים, וערכה יורד בכל שנה ב־12%. מה יהיה ערכה כעבור 4 שנים?
5. מספר המשתתפים בחוג גדל בכל שנה ב־20%. השנה יש בחוג 3,000 משתתפים. כמה משתתפים היו בו לפני שנתיים?
6. סכום כסף גדל בכל שנה ב־6%, וכעבור שנתיים הוא 2,247.2 שקלים. מה היה הסכום בהתחלה?
7. כמות ירדה באחוז קבוע מ־10,000 ל־6,400 ב־2 שנים. בכמה אחוזים ירדה הכמות בכל שנה?
8. כמות עלתה באחוז קבוע מ־5,000 ל־6,655 ב־3 שנים. בכמה אחוזים עלתה הכמות בכל שנה?
9. בדמו של מטופל יש 800 מיליגרם של תרופה, והכמות קטנה בכל שעה ב־25%. כעבור כמה שעות שלמות תרד הכמות לראשונה מתחת ל־300 מיליגרם?
10. מספר החיידקים בתרבית מוכפל בכל 5 שעות. בהתחלה היו בתרבית 300 חיידקים. כמה חיידקים יהיו בה כעבור 15 שעות?
11. ערכי תהליך בשנים עוקבות הם 1,500, 1,800, 2,160, 2,592. הראו שהתהליך מעריכי, מצאו את q ואת הערך הבא.
12. כמות A היא 10,000 וגדלה בכל שנה ב־5%. כמות B היא 12,000 וקטנה בכל שנה ב־5%. כעבור כמה שנים A תהיה לראשונה גדולה מ־B?

© אור בן שטרית · אינסוף

תרגול מעורב שאלות מסכמות

13. מספר המשתמשים באפליקציה א גדל בכל שנה ב־20%, ובתחילת 2023 היו לה 30,000 משתמשים. (א) כמה משתמשים היו לה בתחילת 2025? (ב) בתחילת איזו שנה היו לה 62,208 משתמשים? (ג) לאפליקציה ב היו 36,000 משתמשים בתחילת 2023 ו־43,560 משתמשים בתחילת 2025. בכמה אחוזים גדל מספר המשתמשים שלה בכל שנה? (ד) לאיזו אפליקציה היו יותר משתמשים בתחילת 2026, ובכמה?

14. במאגר 16,000 ליטרים של מים, ובכל יום מתאדים 5% מהכמות שנמצאת בו. (א) כמה ליטרים יהיו במאגר כעבור 3 ימים? (ב) כעבור כמה ימים תרד הכמות לראשונה מתחת ל־12,500 ליטרים?

15. גרף של תהליך מעריכי עובר דרך הנקודות $(0,\ 5{,}000)$ ו־$(2,\ 7{,}200)$. (א) מצאו את q. (ב) מה הערך ב־$t=3$? (ג) מה הערך ב־$t=-1$?

16. נכון או לא נכון? נמקו. (א) ירידה ב־10% ואחריה עלייה ב־10% מחזירות לכמות המקורית. (ב) שתי ירידות של 50% הן יחד ירידה של 100%. (ג) עלייה ב־100% היא הכפלה.

17. בהצעה א סכום של 10,000 שקלים גדל ב־20% בשנה. בהצעה ב אותו סכום גדל ב־2,500 שקלים בשנה. כעבור כמה שנים הסכום בהצעה א יהיה לראשונה גדול מהסכום בהצעה ב?

18. כמות א היא 64,000 וקטנה בכל שנה ב־25%. כמות ב היא 8,000 וגדלה בכל שנה ב־50%. כעבור כמה שנים שתי הכמויות שוות, ומהי הכמות אז?

© אור בן שטרית · אינסוף

14. תשובות ורמזים

רמזים לתרגול העצמאי

5. מחלקים ב־q^2.

6. $A_0 \cdot 1.06^2 = 2{,}247.2$.

8. הפעם צריך שורש שלישי.

10. מהי יחידת הזמן?

תרגילים מודרכים ומציאת טעויות

תרגיל מודרך 1

q^3; 1.157625; 1.05; 5 אחוזים; $23{,}152.5 \cdot 1.05 = 24{,}310.125$, כלומר כ־24,310.13 שקלים.

תרגיל מודרך 2

0.88; 4,400; 3,872; 3,407.36; 2,998.48; שנת 2026.

תרגיל מודרך 3

-2; 1.25; 1.5625; 800 סנטימטרים רבועים; 800.

מצאו את הטעות 1

הטעות בשורה 2: האחוזים אינם מתחברים, כי בכל שנה האחוז מחושב מהמחיר החדש. נכון: $1.1^3 = 1.331$, ולכן המחיר יעלה ב־33.1%.

מצאו את הטעות 2

הטעות בשורה 2: הפעולה שמבטלת חזקה היא שורש ולא חילוק. נכון: $q = \sqrt{1.21} = 1.1$, כלומר עלייה ב־10% בכל שנה. אפשר לזהות את הטעות גם בלי לחשב: $q = 0.605$ קטן מ־1, וזה מקדם של ירידה, אף שהערך עלה.

מצאו את הטעות 3

הטעות בשורה 2: אחורה בזמן מחלקים ב־q. נכון: $500 = 0.8 \div 400$. בדיקה: $400 = 0.8 \cdot 500$, ואילו $480 \cdot 0.8 = 384$.

מצאו את הטעות 4

הטעות בשורה 1: t הוא מספר המעברים בין השנים, ולא מספר השנים ברשימה. נכון: $t = 2021 - 2018 = 3$, ו־$5{,}000 \cdot 1.06^3 = 5{,}955.08$ שקלים.

תשובות לתרגול העצמאי

1. 1.07; 0.93; 1.005; 0.65; 3.

2. עלייה ב־35%; ירידה ב־28%; ירידה ב־0.5%; עלייה ב־110%.

3. $2{,}500 \cdot 1.08^3 = 3{,}149.28$, כלומר כ־3,149 חיידקים.

4. $120{,}000 \cdot 0.88^4 \approx 71{,}963.44$ שקלים.

5. $3{,}000 \div 1.2^2 \approx 2{,}083$ משתתפים.

6. $2{,}247.2 \div 1.06^2 = 2{,}000$ שקלים.

7. $q^2 = 0.64$, $q = 0.8$: ירידה ב־20%.

8. $q^3 = 1.331$, $q = 1.1$: עלייה ב־10%.

9. כעבור 4 שעות: 337.5 כעבור 3 שעות, ו־253.125 כעבור 4 שעות.

10. $t = 3$: $300 \cdot 2^3 = 2{,}400$ חיידקים.

11. המנות כולן 1.2, ולכן $q = 1.2$. הערך הבא: 3,110.4.

12. כעבור שנתיים: $A_2 = 11{,}025$ ו־$B_2 = 10{,}830$. (כעבור שנה: $11{,}400 > 10{,}500$.)

13. (א) 43,200. (ב) 2027 ($t = 4$). (ג) 10% ($q^2 = 1.21$). (ד) לאפליקציה א: 51,840 לעומת 47,916, הפרש של 3,924.

14. (א) 13,718. (ב) כעבור 5 ימים: כ־13,032 כעבור 4 ימים, וכ־12,380.5 כעבור 5 ימים.

15. (א) $q = 1.2$. (ב) 8,640. (ג) $4{,}166.67 \approx 1.2 \div 5{,}000$.

16. (א) לא נכון: $1.1 \cdot 0.9 = 0.99$. (ב) לא נכון: $0.5^2 = 0.25$, כלומר ירידה של 75%. (ג) נכון: $q = 2$.

17. כעבור 4 שנים: 20,736 לעומת 20,000. (כעבור 3 שנים: $17{,}280 < 17{,}500$.)

18. כעבור 3 שנים, ושתיהן 27,000.

© אור בן שטרית · אינסוף

15. דף סיכום

הנוסחה

$$A_t = A_0 \cdot q^t$$

- A_0: הכמות ברגע $t = 0$.
- q: המקדם ליחידת זמן. t: מספר יחידות הזמן.

המקדם

$$q = \frac{100 - p}{100} \qquad q = \frac{100 + p}{100}$$

- עלייה ב־6%: $q = 1.06$. ירידה ב־6%: $q = 0.94$.
- הכפלה: $q = 2$. ירידה בחצי: $q = 0.5$.
- יחידת הזמן נקבעת לפי הסיפור: שנה, חודש, 6 ימים.

קדימה ואחורה

$$A_{-n} = A_0 \cdot q^{-n} = \frac{A_0}{q^n}$$

- קדימה בזמן כופלים, ואחורה בזמן מחלקים.
- כל רגע ידוע יכול לשמש $t = 0$.

מציאת האחוז

$$q^t = \frac{A_t}{A_0}$$

- $t = 2$: שורש ריבועי. $t = 3$: שורש שלישי.
- בודקים בהצבה חוזרת.

מציאת הזמן

- ניסוי וטעייה, בטבלה: כופלים שוב ושוב ב־q.
- «לראשונה»: כותבים את השורה שלפני המעבר ואת השורה שאחריו.
- עונים לפי השאלה: מספר שנים, או שנה קלנדרית.

השוואה

- מחשבים את שתי הכמויות באותו רגע.
- בכמה: מחסירים. פי כמה: מחלקים.
- חיתוך של גרפים: שתי הכמויות שוות.

מלכודות

- $A_0 \cdot q \cdot t$ במקום $A_0 \cdot q^t$.
- חיבור אחוזים: 3 עליות של 10% הן 33.1%, ולא 30%.
- t הוא הפרש שנים, ולא מספר השנים ברשימה.
- מעגלים רק בסוף.

© אור בן שטרית · אינסוף