אינסוף
מתמטיקה

עבודת קיץ
במתמטיקה

למסיימי כיתה י׳ • קיץ תשפ״ז – 2027

5 יח״ל עולים לכיתה י״א

מה מחכה לכם בחוברת?

המעגל | תאלס ודמיון | גאומטריה אנליטית | פונקציות וטרנספורמציות | אלגברה ופרמטרים
בוחן מסכם | בעיות קיצון | פונקציה רציונלית | פונקציית שורש | נגזרת של פולינום | טריגונומטריה

11 פרקים | 100 תרגילים ובוחן מסכם | תוכנית קיץ ל־8 שבועות | תשובות סופיות ודף נוסחאות

שם התלמיד/ה: _____ כיתה: _____ בי״ס: _____

אינסוף תרגילים. חינם.

© 2026 אור בן שטרית · אינסוף. כל הזכויות שמורות.

מותר להדפיס ולהפיץ את החוברת בשלמותה ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנה תרגילים לחומרים אחרים, לשנות אותה או להשתמש בה למטרות מסחריות ללא אישור בכתב.
החוברת נכתבה בידי אינסוף ואינה פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.

שלום לבוגרות ולבוגרי כיתה י׳ ב־5 יח״ל!

סיימתם שנה עמוסה ומרשימה: נגזרות, פונקציות שורש ורציונליות, המעגל, דמיון, טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית. כמעט כל מה שלמדתם השנה הוא הבסיס של שאלון הבגרות הראשון ב־5 יח״ל (035571), ובכיתה י״א תמשיכו ממנו לנגזרת השנייה, לפונקציות טריגונומטריות ולאינטגרלים. החוברת הזו נועדה לשמור על הכושר המתמטי שלכם בחופש, ולחזק בדיוק את מה שהכי חשוב לקראת י״א: **חשיבה, הנמקה ושליטה טכנית**.

החוברת בנויה לפי **המלצות ההוראה של משרד החינוך לכיתה י׳, 5 יח״ל, לשנת תשפ״ז**. רמת התרגילים נעה **בין בינונית־קשה לקשה מאוד** — זו לא חוברת של תרגילים טכניים בלבד. בכל פרק תמצאו תזכורת קצרה, תרגילים מהקל אל הקשה ותרגילי אתגר. בסוף החוברת מחכים לכם **תשובות סופיות** לכל התרגילים, ו**דף הנוסחאות** של 5 יח״ל — אותו דף שתקבלו בבחינת הבגרות.

איך עובדים עם החוברת?

1. **דרך מלאה ומנומקת.** כך נבדקת הבגרות: כל מעבר מוסבר, כל הצבה בנוסחה כתובה. תשובה בלי דרך שווה מעט מאוד.
2. **קודם תחום, אחר כך פתרון.** במשוואות עם שברים ושורשים, ובכל חקירה — רושמים תחום הגדרה לפני הכול, ובודקים את הפתרונות בסוף.
3. **ערכים מדויקים.** משאירים $\sqrt{3}$ ושברים כמו שהם. מחשבון רק בסוף, ובהוכחה — אף פעם לא ערך מקורב.
4. **סרטוט גדול ומדויק.** בגאומטריה מסמנים בסרטוט את כל הנתונים. בחקירה — סקיצה שמתאימה לכל מה שמצאתם.
5. **נתקעתם בתרגיל אתגר?** עבדו עליו 20 דקות, כתבו מה כבר הבנתם, וחזרו אליו אחרי יום. מותר לא להצליח מיד — כך מתחזקים.

© אור בן שטרית · אינסוף

טיפים ללמידה נכונה – מה באמת עובד

שליפה מהזיכרון

נסו לפתור לפני שאתם מציצים בתזכורת או בתשובה. המאמץ להיזכר הוא מה שמקבע את החומר.

מסבירים בקול

אם אתם מצליחים להסביר פתרון לחבר במילים שלכם – סימן שהבנתם אותו באמת, ולא רק זכרתם.

מחברת טעויות

לכל טעות רשמו: במה טעיתי, למה, ומה הדרך הנכונה. בסוף החוברת יש טבלה מוכנה. זה דף החזרה הכי שווה לפני מבחן.

בודקים את עצמכם

אחרי כל תשובה שאלו את עצמכם: האם זה הגיוני? שטח חיובי? הזווית קטנה מ־$180°$? הסקיצה מתאימה לנגזרת?

מערבבים נושאים

פעם בשבוע פתרו תרגיל אחד מפרק קודם. ערבוב מלמד לזהות איזה כלי מתאים – בדיוק מה שנדרש בבגרות.

שינה ומנוחה

הזיכרון מתקבע בזמן השינה. שנת לילה טובה לפני יום למידה שווה יותר מעוד שעת תרגול בעייפות.

סימנים בחוברת:

אתגר ★ תרגיל קשה במיוחד

הוכחה שאלת הוכחה

חשיבה שאלה מושגית – מנמקים, לא רק מחשבים

אוריינות שאלה מהחיים

בהצלחה ותיהנו מהחופש!
צוות אינסוף

© אור בן שטרית · אינסוף

תוכנית הקיץ שלי

שמונה שבועות, שלוש־ארבע פעמים בשבוע, כשעה בכל פעם. יוצאים לטיול? אין בעיה — הזיזו שבוע, העיקר להמשיך.

שבוע	מה עושים	סיימתי	כמה אני בטוח/ה?
1	פרק 1 — משוואות ואי־שוויונות + פרק 2 — פונקציות וטרנספורמציות	☐	○ ○ ○
2	פרק 3 — גאומטריה אנליטית	☐	○ ○ ○
3	פרק 4 — תאלס, חוצה זווית ודמיון	☐	○ ○ ○
4	פרק 5 — המעגל	☐	○ ○ ○
5	פרק 6 — טריגונומטריה	☐	○ ○ ○
6	פרק 7 — נגזרת של פולינום + פרק 8 — פונקציית שורש	☐	○ ○ ○
7	פרק 9 — פונקציה רציונלית + פרק 10 — בעיות קיצון	☐	○ ○ ○
8	פרק 11 — בוחן מסכם + חזרה על מחברת הטעויות	☐	○ ○ ○

ההתחייבות שלי

הימים שבהם אלמד:

א ב ג ד ה ו

השעה הקבועה שלי: _____

המטרה שלי לכיתה י"א: _____

_____

מד ההתקדמות

צבעו משבצת על כל פרק שסיימתם:

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

סיימתי את כל החוברת בתאריך:

_____

איך משתמשים במד הביטחון?

בסוף כל שבוע צבעו עיגול אחד, שניים או שלושה: **עיגול אחד** — "עוד לא, אני צריך/ה חזרה"; **שניים** — "כמעט, יש לי עוד שאלות"; **שלושה** — "בטוח/ה, אני יכול/ה להסביר לחבר". בשבוע האחרון חזרו קודם לנושאים שקיבלו עיגול אחד בלבד.

טיפ של מורים ותיקים

בתחילת כיתה י"א בתי ספר רבים פותחים את השנה במבחן על חומר כיתה י'. פרק 11 בנוי כמו מבחן כזה, בסגנון שאלון הבגרות: פתרו אותו בתנאי מבחן — שעתיים וחצי, מחשבון רגיל (לא גרפי), דף הנוסחאות שבסוף החוברת, ובלי להציץ בתשובות.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 1 משוואות ואי־שוויונות

שברים אלגבריים · שורשים · הצבה · אי־שוויונות מנה · פרמטרים · מערכות

תזכורת קצרה

שברים	קודם **תחום הצבה** (כל מכנה $\neq 0$), אחר כך כפל במכנה המשותף, ובסוף — בדיקה מול התחום.
שורשים	מבודדים שורש באגף אחד ומעלים בריבוע. העלאה בריבוע עלולה **להוסיף** פתרונות זרים — חובה להציב ולבדוק.
הצבה	$t = x^2$ או $t = (\text{ביטוי חוזר})$. זכרו את ההגבלה על t: למשל אם $t = \sqrt{\dots}$ אז $t \geq 0$.
אי־שוויון מנה	**לא כופלים** במכנה שסימנו לא ידוע. מעבירים הכול לאגף אחד, מביאים למכנה משותף ובונים טבלת סימנים. אפסי המכנה לעולם לא נכללים בפתרון.
פרמטר במשוואה ריבועית	המקרה שבו המקדם של x^2 מתאפס נבדק **בנפרד**. אחרת: $\Delta > 0$ — שני פתרונות, $\Delta = 0$ — פתרון אחד, $\Delta < 0$ — אין פתרון.

1 פתרו. בכל סעיף רשמו קודם את תחום ההצבה.

א. $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{18}{x^2-9}$

ב. $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{x+2}{2x-1}$

ג. $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{4x}{x^2+1} = 5$ (רמז: הצבה)

ד. $\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x-1}$

חשיבה בסעיף ד מתקבלת תופעה מיוחדת. תארו אותה במילים: מה קבוצת הפתרונות?

2 פתרו ובדקו את הפתרונות.

א. $\sqrt{2x+3} = x$

ב. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$

ג. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3$

ד. $x^2 - 3x + \sqrt{x^2-3x+5} = 7$

3 פתרו.

א. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

ב. $(x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x) - 3 = 0$

ג. **אתגר ★** $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ (רמז: כפלו את הגורם הראשון ברביעי, ואת השני בשלישי. מה חוזר?)

4 פתרו בעזרת טבלת סימנים.

א. $(x^2-4)(x^2-9x+14) \leq 0$

ב. $\dfrac{2x-1}{x+3} \geq 1$

ג. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1} \leq 0$

ד. $\dfrac{3}{x-1} < x+1$

© אור בן שטרית · אינסוף

5 נתונה המשוואה $(m-1)x^2-2mx+m+3=0$.

א. פתרו את המשוואה עבור $m=1$.

ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה שני פתרונות שונים?

ג. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה פתרון אחד בדיוק? מצאו אותו בכל מקרה.

ד. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה שני פתרונות בעלי סימנים מנוגדים (אחד חיובי ואחד שלילי)?
(רמז: עבור $m\neq 1$ — מה אפשר לומר על הסימן של אגף שמאל ב־$x=0$, ביחס לכיוון הפתיחה של הפרבולה?)

ה. **חשיבה** הראו כי $x=1$ אינו פתרון של המשוואה לאף ערך של m.

6 א. פתרו את המערכת: $xy=6$, $x^2+y^2=13$. (רמז: מה הקשר בין $(x+y)^2$ לנתונים?)

ב. פתרו את המערכת: $x^2-xy+y^2=7$, $x+y=5$.

ג. נתונים הישר $y=2x+k$ והפרבולה $y=x^2-4x+7$. עבור אילו ערכים של k יש לישר ולפרבולה שתי נקודות משותפות? נקודה משותפת אחת? ועבור אילו ערכים אין להם נקודות משותפות? עבור המקרה של נקודה אחת — מצאו אותה, והסבירו מה המשמעות הגרפית.

7 **אתגר ★** **חשיבה** נתונה המשוואה $\sqrt{x+a}=x$, כאשר a פרמטר.

א. פתרו את המשוואה עבור $a=6$ ועבור $a=0$.

ב. הראו כי כל פתרון של המשוואה מקיים $x\geq 0$ וגם $x^2-x-a=0$.

ג. מצאו את כל ערכי a שעבורם יש למשוואה פתרון אחד בדיוק, ואת כל ערכי a שעבורם יש לה שני פתרונות.

ד. הסבירו את התוצאה בעזרת סרטוט של הגרפים $y=\sqrt{x+a}$ ו־$y=x$: כיצד משפיע a על הגרף של $y=\sqrt{x+a}$?

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

8 **אתגר ★** נתונה המשוואה $x^4-(a+1)x^2+a=0$.

א. הראו כי $x^4-(a+1)x^2+a=(x^2-1)(x^2-a)$.

ב. עבור אילו ערכים של a יש למשוואה בדיוק ארבעה פתרונות שונים? בדיוק שלושה? בדיוק שניים?

9 **אתגר ★** פתרו את המערכת: $x+y+xy=11$, $x^2y+xy^2=30$.
(רמז: סמנו $s=x+y$ ו־$p=xy$, ופתרו קודם מערכת עבור s ו־p.)

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 2 פונקציות וטרנספורמציות

זוגיות · פונקציות חזקה · פולינום לפי שורשים · הזזות ומתיחות · ערך מוחלט

תזכורת קצרה

זוגית / אי־זוגית	$f(-x)=f(x)$ — הגרף סימטרי ביחס לציר ה־y. $f(-x)=-f(x)$ — הגרף סימטרי ביחס לראשית הצירים. תחום ההגדרה חייב להיות סימטרי ביחס ל־0.
פולינום כמכפלת גורמים	בשורש מריבוי **זוגי** הגרף **נוגע** בציר ה־x בלי לחצות אותו; בשורש מריבוי **אי־זוגי** הוא **חוצה** את הציר (בריבוי 3 ומעלה — חוצה עם משיק אופקי). בקצוות — המחובר בעל החזקה הגבוהה ביותר קובע.
$a\cdot f(x-p)+k$	הזזה ימינה ב־p, מתיחה אנכית פי a, הזזה למעלה ב־k. $-f(x)$ — שיקוף בציר ה־x; $f(-x)$ — שיקוף בציר ה־y.
$\lvert f(x)\rvert$ ו־$f(\lvert x\rvert)$	$\lvert f(x)\rvert$: החלק שמתחת לציר ה־x "מתהפך" למעלה. $f(\lvert x\rvert)$: מוחקים את החלק שמשמאל לציר ה־y ומשקפים את החלק הימני — הפונקציה זוגית.

10 א. קבעו עבור כל פונקציה אם היא זוגית, אי־זוגית או אף אחת מהן, ונמקו בעזרת $f(-x)$:

$$x^4-3x^2+1 \qquad x^3-5x \qquad x^3+x^2 \qquad \frac{x^2+1}{x}$$

$$\sqrt{4-x^2} \qquad x\,|x| \qquad |x-1| \qquad \frac{x^2}{x^4+1}$$

ב. **הוכחה** הוכיחו: מכפלה של שתי פונקציות אי־זוגיות (המוגדרות באותו תחום) היא פונקציה זוגית.

ג. **הוכחה** הוכיחו: אם f אי־זוגית ומוגדרת ב־$x=0$, אז $f(0)=0$.

ד. **חשיבה** האם קיימת פונקציה שהיא גם זוגית וגם אי־זוגית (בתחום $\mathbb{R}$)? אם כן — מצאו את כולן.

11 לכל פונקציה: מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים, קבעו בכל שורש אם הגרף חוצה את ציר ה־x או רק נוגע בו, תארו את התנהגות הגרף בקצוות, סרטטו סקיצה (בלי להשתמש בנגזרת) — ופתרו את אי־השוויון שלידה.

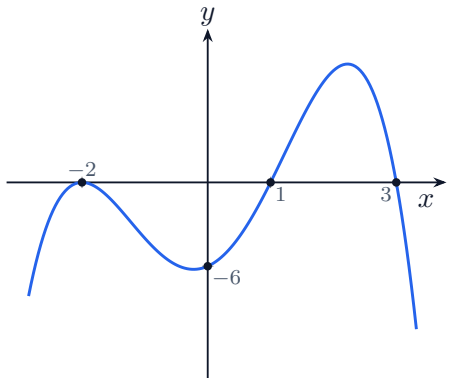
א. $f(x)=(x+2)^2(x-1)(x-4)$; פתרו: $f(x)\le 0$.

ב. $g(x)=-x(x-3)^3$; פתרו: $g(x)>0$.

ג. $h(x)=(x^2+1)(x-2)^2(x+1)$; פתרו: $h(x)\ge 0$.

© אור בן שטרית · אינסוף

12 בסרטוט מתואר גרף של פולינום $f(x)$ ממעלה מינימלית. הגרף משיק לציר ה־x ב־$x=-2$, חוצה אותו ב־$x=1$ וב־$x=3$, וחותך את ציר ה־y בנקודה $(0,\,-6)$.



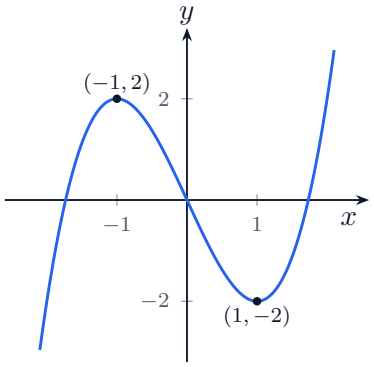
א. הסבירו מדוע המעלה של f היא לפחות 4.

ב. מצאו את $f(x)$.

ג. חשבו את $f(2)$ ובדקו שהתוצאה מתאימה לסרטוט.

ד. פתרו את אי־השוויון $f(x)>0$.

13 בסרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$.



לפונקציה יש נקודת מקסימום $(-1,\,2)$ ונקודת מינימום $(1,\,-2)$.
מצאו את נקודות הקיצון של כל פונקציה, וסרטטו סקיצה שלה:

א. $g(x)=f(x-2)+1$

ב. $h(x)=-2f(x)$

ג. $q(x)=f(-x)$. **חשיבה** הסבירו מדוע כאן הגרף של $f(-x)$ זהה לגרף של $-f(x)$.

ד. $|f(x)|$

ה. $f(|x|)$

ו. **חשיבה** כמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)|=1$? ועבור איזה ערך של k יש למשוואה $f(|x|)=k$ שלושה פתרונות בדיוק? נמקו בעזרת הסקיצות.

14 א. סרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים $y=\dfrac{6}{x}$ ו־$y=x-1$, ומצאו את נקודות החיתוך שלהם.

ב. פתרו את אי־השוויון $\dfrac{6}{x}>x-1$ — פעם אחת בעזרת הסרטוט ופעם אחת אלגברית. ודאו שהתשובות זהות.

ג. עבור אילו ערכים של k הישר $y=-x+k$ **אינו** חותך את הגרף $y=\dfrac{6}{x}$?

15 א. סרטטו באותה מערכת צירים את $y=x^2$ ואת $y=x^4$. באילו תחומים הגרף של x^4 נמצא מעל הגרף של x^2? היעזרו בסרטוט ונמקו אלגברית.

ב. פתרו: $x^5>x^3$.

ג. פתרו: $x^4\le 8x$.

© אור בן שטרית · אינסוף

16 אתגר ★ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-6x+8$, והפונקציה g מוגדרת כך: $g(x)=\left|x^2-6|x|+8\right|$.

א. הסבירו כיצד מקבלים את הגרף של g מהגרף של f בשני שלבים, וסרטטו את שלושת הגרפים: $f(x)$, $f(|x|)$ ו־$g(x)$.

ב. קבעו, לכל ערך של k, כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=k$.

ג. עבור איזה ערך של k יש למשוואה $g(x)=k$ שלושה פתרונות בדיוק? מצאו אותם.

17 חשיבה קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה. אם כן — נמקו; אם לא — תנו דוגמה נגדית.

א. לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש לפחות נקודת חיתוך אחת עם ציר ה־x.

ב. אם f זוגית, אז הגרף של $f(x-3)$ סימטרי ביחס לישר $x=3$.

ג. אם f אי־זוגית, אז $|f(x)|$ זוגית.

ד. אם f אי־זוגית, אז גם $f(x)+1$ אי־זוגית.

ה. $x^6>x^4$ לכל $x\neq 0$.

ו. לגרף של $y=x^2-4|x|$ יש בדיוק שלוש נקודות קיצון.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

18 אתגר ★ f הוא פולינום זוגי ממעלה רביעית. $f(0)=4$, והגרף של f חותך את ציר ה־x בדיוק בנקודות $x=\pm 1$ ו־$x=\pm 2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. פתרו את אי־השוויון $f(x)\leq 4$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של f, וסרטטו סקיצה של $|f(x)|$.

ד. עבור איזה ערך של k יש למשוואה $|f(x)|=k$ בדיוק שישה פתרונות? ועבור איזה ערך — בדיוק שלושה?

19 אתגר ★ נתונה הפונקציה $g(x)=2(x-1)^3-6(x-1)+3$.

א. תארו כיצד מתקבל הגרף של g מהגרף של $f(x)=x^3-3x$ (תרגיל 13).

ב. מצאו את נקודות הקיצון של g — בלי לגזור.

ג. הוכיחו כי $g(1+t)+g(1-t)=6$ לכל t. מה המשמעות של השוויון לגבי הגרף של g?

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 3 מבוא לגאומטריה אנליטית

מרחק ואמצע קטע · שיפוע ומשוואת ישר · מקבילים ומאונכים · משוואת מעגל

תזכורת קצרה

מרחק ואמצע	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
שיפוע ומשוואת ישר	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$y-y_1=m(x-x_1)$
מקבילים ומאונכים	מקבילים: $m_1=m_2$	מאונכים: $m_1\cdot m_2=-1$
מעגל	מעגל שמרכזו (a,b) ורדיוסו R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. נקודה נמצאת **בתוך** המעגל כאשר הצבת שיעוריה באגף שמאל נותנת ערך קטן מ־R^2.	
תכונות שימושיות	המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה · האנך מהמרכז למיתר חוצה אותו · זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה.	

20 נתונות הנקודות $A(-2,\ 1)$, $B(6,\ -3)$ ו־$C(4,\ 3)$.

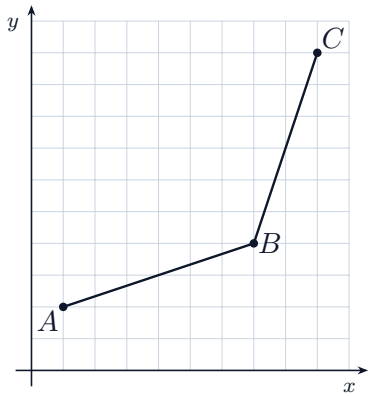
א. הוכיחו כי $\sphericalangle ACB=90°$.

ב. מצאו את משוואת המעגל העובר דרך A, B ו־C. נמקו מדוע מרכזו נמצא על הקטע AB.

ג. מצאו את משוואת הגובה מהקודקוד C לצלע AB ואת עקב הגובה D. מה מיוחד בנקודה D, ומה ניתן להסיק מכך על המשולש?

ד. מצאו נקודה E כך שהמרובע $ACBE$ הוא ריבוע, והראו שגם E נמצאת על המעגל מסעיף ב.

21 שלושה קודקודים של המקבילית $ABCD$ הם $A(1,\ 2)$, $B(7,\ 4)$, $C(9,\ 10)$.



א. מצאו את שיעורי הקודקוד D.

ב. הוכיחו בשתי דרכים שונות שהמקבילית היא מעוין.

ג. חשבו את שטח המעוין.

ד. מצאו את משוואת המעגל החסום במעוין.
(רמז: חלקו את המעוין לארבעה משולשים שקודקודם המשותף הוא מרכז המעגל.)

22 נתון המעגל $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

א. הראו שהנקודה $A(6,\ 3)$ נמצאת על המעגל.

ב. מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה A. (רמז: לאיזה קטע המשיק מאונך?)

ג. המשיק חותך את הצירים בנקודות P ו־Q. חשבו את שטח המשולש OPQ (O — ראשית הצירים).

ד. מצאו את הנקודה B על המעגל שבה המשיק מקביל למשיק בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B.

© אור בן שטרית · אינסוף

ה. מצאו את הנקודות על המעגל שבהן המשיק מקביל לציר ה־x.

23 נתונות הנקודות $A(1,\ 4)$ ו־$B(7,\ -2)$.

א. מצאו את כל הנקודות P על ציר ה־x שעבורן $\sphericalangle APB = 90°$. (רמז: איפה נמצאות כל הנקודות שמהן רואים את AB בזווית ישרה?)

ב. מצאו את הנקודה P על ציר ה־x שעבורה $PA = PB$. האם המשולש APB ישר־זווית במקרה זה? נמקו.

24 אתגר ★ נתון המשולש שקודקודיו $A(0,\ 0)$, $B(8,\ 0)$ ו־$C(2,\ 6)$.

א. מצאו את O — מרכז המעגל החוסם את המשולש (נקודת המפגש של האנכים האמצעיים), ואת רדיוס המעגל.

ב. מצאו את G — נקודת המפגש של התיכונים.

ג. מצאו את H — נקודת המפגש של הגבהים.

ד. הראו שהנקודות H, G ו־O נמצאות על ישר אחד, ושׁ־$HG = 2 \cdot GO$.

25 $A(1,\ 1)$ ו־$C(7,\ 5)$ הם קודקודים נגדיים של הריבוע $ABCD$.

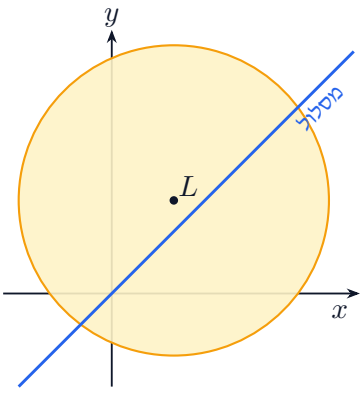
א. מצאו את מרכז הריבוע ואת משוואת האלכסון BD.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו־D.

ג. חשבו את שטח הריבוע בשתי דרכים.

ד. מצאו את משוואת המעגל החוסם את הריבוע ואת משוואת המעגל החסום בו.

26 אוריינות מגדלור עומד בנקודה $L(2,\ 3)$ (יחידות המערכת: ק"מ), ואורו מכסה עיגול שרדיוסו 5 ק"מ. ספינה שטה לאורך הישר $y = x$.



א. מצאו את הנקודות שבהן הספינה נכנסת לאזור המואר ויוצאת ממנו.

ב. מה אורך הקטע שבו הספינה מוארת?

ג. מצאו את הנקודה במסלול הספינה הקרובה ביותר למגדלור, ואת המרחק ממנה למגדלור. (רמז: הקטע הקצר ביותר מנקודה לישר מאונך לישר.)

ד. חשיבה הסבירו מדוע הנקודה שמצאתם בסעיף ג היא בדיוק אמצע הקטע שבין הנקודות שמצאתם בסעיף א.

27 חשיבה נתון המעגל $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.

א. עבור אילו ערכים של k הנקודה $(k,\ k+1)$ נמצאת בתוך המעגל?

ב. הראו שכל הנקודות מהצורה $(k,\ k+1)$ נמצאות על ישר אחד, ומצאו את משוואתו.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הישר עם המעגל, והסבירו את הקשר לתשובה של סעיף א.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

28 אתגר ★ מצאו את משוואת המעגל העובר דרך הנקודות $A(1,\ 1)$ ו־$B(7,\ 3)$, שמרכזו נמצא על הישר $y = x + 2$. פתרו בשתי דרכים:

א. מסמנים את המרכז $(a,\ a+2)$ ודורשים מרחקים שווים מ־A ומ־B.

ב. מוצאים את החיתוך של הישר הנתון עם האנך האמצעי לקטע AB. הסבירו מדוע המרכז חייב להיות על האנך האמצעי.

29 אתגר ★ $A(0,\ 0)$ ו־$C(8,\ 4)$ הם קודקודים נגדיים של המעוין $ABCD$, ושטח המעוין הוא 30. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו־D.

(רמז: מהו אורך האלכסון BD? ומה הכיוון שלו ביחס ל־AC?)

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

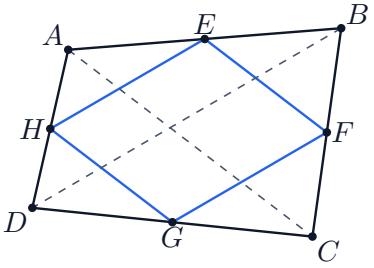
פרק 4 תאלס, חוצה זווית ודמיון

קטע אמצעים · מפגש התיכונים · תאלס · חוצה זווית · דמיון ויחסי שטחים

תזכורת קצרה

מפגש התיכונים	שלושת התיכונים נחתכים בנקודה אחת, המחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הארוך — ליד הקודקוד). התיכונים מחלקים את המשולש לשישה משולשים שווי־שטח.
תאלס והרחבה	ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים. ההרחבה: ישר המקביל לצלע במשולש יוצר משולש דומה.
חוצה זווית	חוצה זווית פנימית מחלק את הצלע שמולה ביחס הצלעות הכולאות: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (וגם המשפט ההפוך).
דמיון	ז.ז · צ.ז.צ · צ.צ.צ. יחס הדמיון k הוא גם יחס הגבהים, התיכונים, חוצי הזוויות וההיקפים; יחס השטחים הוא k^2.
שטחים בלי נוסחה	שני משולשים עם אותו גובה — יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים.

30 הוכחה $ABCD$ הוא מרובע קמור. הנקודות E, F, G, H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA בהתאמה.



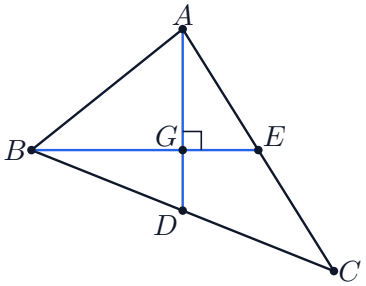
א. הוכיחו כי $EFGH$ מקבילית.

ב. איזה תנאי צריך להתקיים לגבי האלכסונים AC ו־BD כדי ש־$EFGH$ יהיה מלבן? מעוין? ריבוע? הוכיחו את אחד המקרים.

ג. הוכיחו: $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

ד. אלכסוני המרובע $ABCD$ מאונכים זה לזה, ואורכיהם 10 ס"מ ו־14 ס"מ. חשבו את ההיקף ואת השטח של $EFGH$.

31 במשולש ABC התיכונים AD ו־BE נחתכים בנקודה G ומאונכים זה לזה. נתון: $AD=12$ ס"מ, $BE=15$ ס"מ.



א. חשבו את אורכי הקטעים AG, GD, BG, GE, ואת אורך הצלע AB.

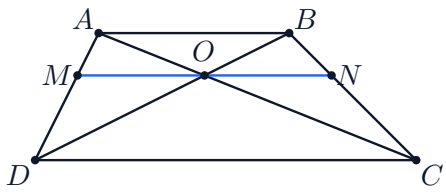
ב. חשבו את שטח המשולש ABC.

ג. CF הוא התיכון השלישי. חשבו את אורכו. (רמז: מהו GF במשולש AGB?)

ד. אתגר ★ חשבו את אורכי הצלעות BC ו־AC.

© אור בן שטרית · אינסוף

32 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = 6$, $CD = 12$. האלכסונים נחתכים בנקודה O. דרך O מעבירים ישר המקביל לבסיסים, והוא חותך את השוקיים AD ו־BC בנקודות M ו־N.



א. הוכיחו כי $\triangle AOB \sim \triangle COD$, ומצאו את היחס $AO : OC$.

ב. חשבו את MO ואת ON. מה אפשר לומר על הנקודה O?

ג. מצאו את היחס בין שטחי המשולשים AOB, COD, AOD ו־BOC.

ד. אתגר ★ הוכחה הוכיחו שבכל טרפז שבסיסיו a ו־b (כאשר M ו־N מוגדרות כמו בתרגיל) מתקיים $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

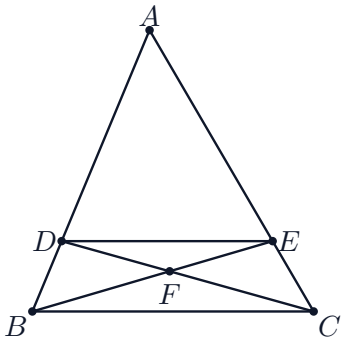
33 במשולש ABC נתון: $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 10$. AD חוצה את הזווית A (D על BC), ו־BE חוצה את הזווית B (E על AC). חוצי הזוויות נחתכים בנקודה I.

א. חשבו את BD, DC, AE ו־EC.

ב. חשבו את היחס $AI : ID$. (רמז: BI הוא חוצה זווית במשולש ABD.)

ג. אתגר ★ הוכחה הוכיחו שבכל משולש: $\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}$, ובדקו שהנוסחה מתאימה לתוצאה של סעיף ב.

34 במשולש ABC הנקודות D ו־E נמצאות על הצלעות AB ו־AC בהתאמה, ו־$DE \parallel BC$. הקטעים BE ו־CD נחתכים בנקודה F. נתון: $S_{\triangle DEF} = 9$ סמ"ר, $S_{\triangle BCF} = 16$ סמ"ר.

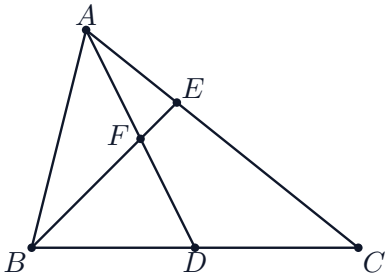


א. מצאו את היחס $DE : BC$.

ב. חשבו את השטחים של המשולשים DBF ו־ECF.

ג. חשבו את השטח של המשולש ABC.

35 במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC, והנקודה E נמצאת על AC כך ש־$AE : EC = 1 : 2$. הקטעים BE ו־AD נחתכים בנקודה F.



א. דרך D העבירו ישר המקביל ל־BE, והוא חותך את AC בנקודה K. הוכיחו כי $EK = AE$.

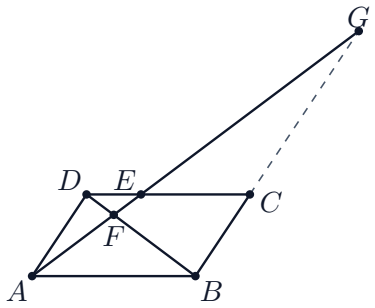
ב. הוכיחו כי F היא אמצע AD.

ג. מצאו את היחס $FE : BF$.

ד. נתון כי שטח המשולש ABC הוא 60 סמ"ר. חשבו את השטחים של המשולשים ABF ו־AFE.

© אור בן שטרית · אינסוף

36 $ABCD$ מקבילית. הנקודה E נמצאת על הצלע CD כך ש־$DE:EC=1:2$. הישר AE חותך את האלכסון BD בנקודה F, ואת המשך הצלע BC בנקודה G. נתון: $S_{\triangle DEF}=3$ סמ"ר.



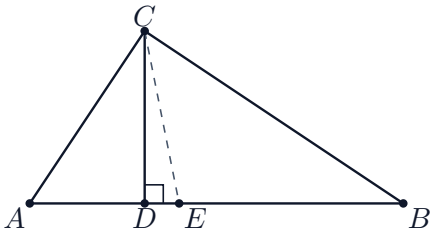
א. מצאו את היחס $DF:FB$.

ב. חשבו את שטח המקבילית.

ג. חשבו את שטח המרובע $BCEF$.

ד. חשבו את שטח המשולש ABG.

37 במשולש ABC הזווית C ישרה, ו־CD הוא הגובה ליתר. נתון: $AD=4$ ס"מ, $DB=9$ ס"מ.



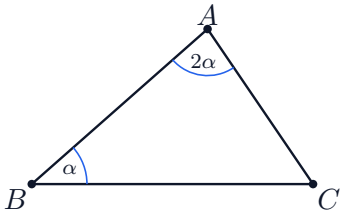
א. **הוכחה** הוכיחו כי $\triangle ACD\sim\triangle CBD\sim\triangle ABC$.

ב. הסיקו כי $CD^2=AD\cdot DB$ וגם $AC^2=AD\cdot AB$, וחשבו את CD, AC ו־BC.

ג. מהו היחס בין שטחי המשולשים ACD ו־CBD?

ד. חוצה הזווית C חותך את היתר בנקודה E. חשבו את DE.

38 **אתגר ★** **הוכחה** במשולש ABC מתקיים $\sphericalangle BAC=2\sphericalangle ABC$.



א. הוכיחו כי $BC^2=AC\cdot(AC+AB)$.
(רמז: האריכו את CA מעבר ל־A עד לנקודה P שעבורה $AP=AB$, ומצאו משולשים דומים.)

ב. נתון כי $AC=4$ ו־$AB=5$. חשבו את BC.

ג. **חשיבה** מצאו משולש נוסף שאורכי צלעותיו מספרים שלמים, שבו זווית אחת כפולה מזווית אחרת.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

39 **אתגר ★** במשולש ABC נתון: $AB=6$, $AC=9$. חוצה הזווית A חותך את BC בנקודה D. דרך D מעבירים ישר המקביל ל־AB, והוא חותך את AC בנקודה E.

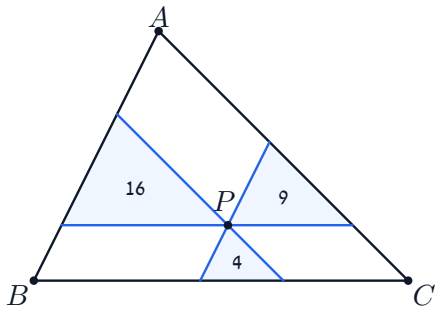
א. חשבו את DE ואת AE.

ב. **הוכחה** הוכיחו שהמשולש ADE שווה־שוקיים.

ג. **הוכחה** הוכיחו שבכל משולש: $DE=\dfrac{AB\cdot AC}{AB+AC}$. (השוו לתרגיל 32.)

© אור בן שטרית · אינסוף

40 אתגר ★ דרך נקודה P שבתוך המשולש ABC מעבירים שלושה ישרים, כל אחד מקביל לאחת מצלעות המשולש. הישרים מחלקים את המשולש לשלושה משולשים קטנים ולשלוש מקביליות. שטחי המשולשים הקטנים הם 4, 9 ו־16 סמ"ר.



א. הסבירו מדוע כל אחד מהמשולשים הקטנים דומה למשולש ABC.

ב. הראו שסכום שלושת יחסי הדמיון הוא 1. (רמז: הסתכלו על הצלע BC.)

ג. חשבו את שטח המשולש ABC.

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

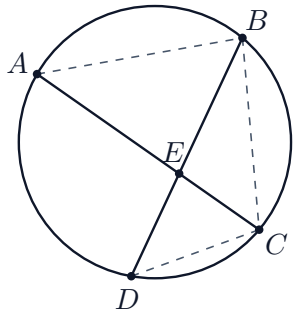
פרק 5 המעגל

זוויות במעגל · מיתרים ומשיקים · מרובע חסום וחוסם · מעגל חסום · דמיון במעגל

תזכורת קצרה

זוויות	זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת — שוות. זווית היקפית הנשענת על קוטר — ישרה.
משיקים	משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. שני משיקים מנקודה אחת — שווים. הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מהצד השני.
מרובעים	מרובע חסום במעגל $\Leftrightarrow$ סכום זוויות נגדיות $180°$. מרובע חוסם מעגל $\Leftrightarrow$ סכומי זוגות הצלעות הנגדיות שווים.
דמיון במעגל	מיתרים נחתכים: $AE\cdot EC=BE\cdot ED$. חותך ומשיק מנקודה חיצונית: $PT^2=PA\cdot PB$. (מוכיחים בעזרת משולשים דומים.)

41 המיתרים AC ו־BD נחתכים בנקודה E שבתוך המעגל.



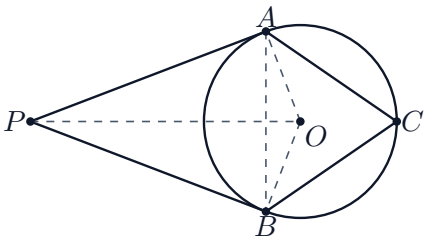
א. **הוכחה** הוכיחו כי $\sphericalangle AEB=\sphericalangle ACB+\sphericalangle DBC$, והסיקו שהזווית AEB שווה למחצית סכום הקשתות $\overset{\frown}{AB}$ ו־$\overset{\frown}{CD}$.

ב. נתון: $\sphericalangle AEB=80°$, והקשת $\overset{\frown}{AB}$ (זו שאינה מכילה את C ואת D) היא $100°$. חשבו את הקשת $\overset{\frown}{CD}$ ואת הזוויות ACB ו־DBC.

ג. **הוכחה** הוכיחו כי $\triangle AEB\sim\triangle DEC$, והסיקו כי $AE\cdot EC=BE\cdot ED$.

ד. (בסעיף זה אין להשתמש בנתוני סעיף ב.) נתון: $AE=6$, $EC=4$, $BE=8$. חשבו את ED.

42 מהנקודה P מעבירים שני משיקים למעגל שמרכזו O; נקודות ההשקה הן A ו־B. הנקודה C נמצאת על הקשת הגדולה AB. נסמן $\sphericalangle APB=2\beta$.



א. הביעו באמצעות β את הזוויות AOB ו־ACB.

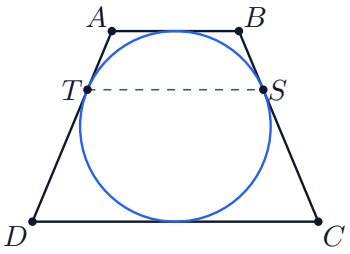
ב. **הוכחה** הוכיחו כי PO חוצה את הזווית APB ומאונך ל־AB.

ג. נתון: $PA=12$ ס"מ, ורדיוס המעגל 5 ס"מ. חשבו את PO ואת אורך המיתר AB.

ד. חשבו את המרחק הקצר ביותר מ־P אל המעגל.

© אור בן שטרית · אינסוף

43 טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$) חוסם מעגל שרדיוסו r. נתון: $AB = 4$ ס"מ, $CD = 9$ ס"מ.



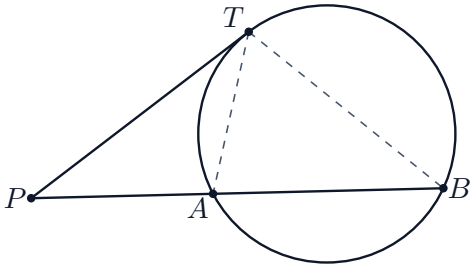
א. חשבו את אורך השוק של הטרפז.

ב. חשבו את גובה הטרפז ואת r.

ג. **הוכחה** הוכיחו שבכל טרפז שווה־שוקיים החוסם מעגל מתקיים $r^2 = \frac{AB \cdot CD}{4}$.

ד. **אתגר** המעגל משיק לשוקיים בנקודות T ו־S. חשבו את אורך הקטע TS.

44 מהנקודה P שמחוץ למעגל מעבירים משיק PT (T — נקודת ההשקה) וישר נוסף החותך את המעגל בנקודות A ו־B (A בין P ל־B).



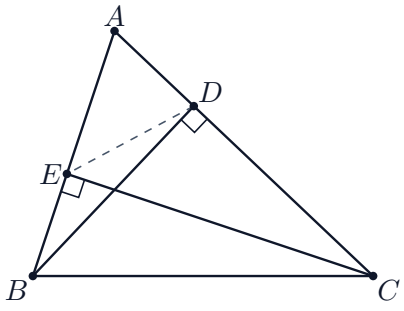
א. **הוכחה** הוכיחו כי $\sphericalangle PTA = \sphericalangle PBT$.

ב. **הוכחה** הוכיחו כי $\triangle PTA \sim \triangle PBT$, והסיקו כי $PT^2 = PA \cdot PB$.

ג. נתון: $PA = 4$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ. חשבו את PT ואת היחס $TA : TB$.

ד. מ־P מעבירים חותך נוסף, החותך את המעגל בנקודות C ו־D (C בין P ל־D), ו־$PC = 3$ ס"מ. חשבו את CD.

45 במשולש חד־זוויות ABC הקטעים BD ו־CE הם גבהים (D על AC, E על AB).



א. **הוכחה** הוכיחו שהנקודות B, C, D, E נמצאות על מעגל אחד, ומצאו את מרכזו.

ב. **הוכחה** הוכיחו כי $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$.

ג. הסיקו כי $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

ד. נתון כי $\sphericalangle BAC = 60°$. הוכיחו כי $DE = \frac{1}{2}BC$.

ה. **אתגר** נתון גם כי $BC = 10$ ס"מ. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

46 **הוכחה**

א. הוכיחו שמקבילית החסומה במעגל היא מלבן.

ב. הוכיחו שטרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה־שוקיים.

ג. משולש שווה־שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום במעגל. הוכיחו שהמשיק למעגל בנקודה A מקביל ל־BC.

ד. **אתגר** הוכיחו **בדרך השלילה**: ישר המאונך לרדיוס בקצהו שעל המעגל הוא משיק למעגל.

© אור בן שטרית · אינסוף

47 במשולש ABC הזווית C ישרה, $BC=8$ ו־$AC=15$.

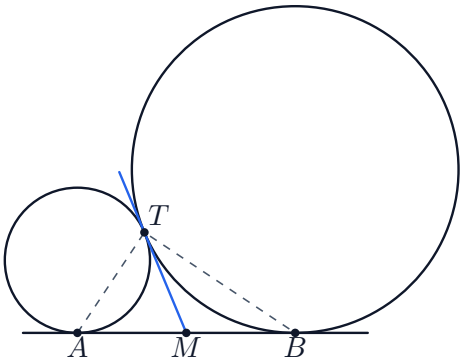
א. **הוכחה** הוכיחו שבכל משולש ישר־זווית רדיוס המעגל החסום הוא $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ (a,b — הניצבים, c — היתר), וחשבו את r במשולש הנתון.

ב. חשבו את רדיוס המעגל החוסם R, והסבירו היכן נמצא מרכזו.

ג. מקמו את המשולש במערכת צירים: $C(0,0)$, $B(8,0)$, $A(0,15)$. מצאו את מרכז המעגל החסום I ואת מרכז המעגל החוסם O, וחשבו את המרחק OI.

ד. **חשיבה** בדקו שמתקיים $OI^2=R^2-2Rr$. (זוהי נוסחת אוילר, והיא נכונה בכל משולש!)

48 **אתגר ★** שני מעגלים שרדיוסיהם 4 ס"מ ו־9 ס"מ משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T. ישר נוסף משיק לשני המעגלים בנקודות A ו־B. המשיק המשותף בנקודה T חותך את AB בנקודה M.



א. **הוכחה** הוכיחו כי M היא אמצע AB.

ב. הסיקו כי $\sphericalangle ATB=90^\circ$.

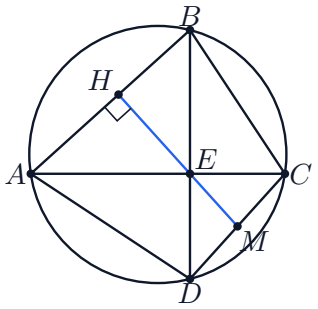
ג. חשבו את AB. (רמז: מהו המרחק בין המרכזים?)

ד. **הוכחה** הוכיחו שעבור רדיוסים r_1 ו־r_2 כלשהם מתקיים $AB=2\sqrt{r_1r_2}$.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

49 **אתגר ★** **הוכחה** המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ואלכסוניו מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה E. הישר העובר דרך E ומאונך ל־AB חותך את AB בנקודה H ואת CD בנקודה M. הוכיחו כי M היא אמצע הצלע CD.
(רמז: הראו כי $\sphericalangle MEC=\sphericalangle MCE$, ובאותו אופן $\sphericalangle MED=\sphericalangle MDE$.)



50 **אתגר ★** **הוכחה** המשולש שווה־הצלעות ABC חסום במעגל, ו־P היא נקודה על הקשת BC שאינה מכילה את A.

א. על הקטע PA מסמנים נקודה D כך ש־$PD=PB$. הוכיחו שהמשולש BDP שווה־צלעות.

ב. הוכיחו כי $\triangle ABD\cong\triangle CBP$, והסיקו כי $PA=PB+PC$.

ג. נתון: $PB=3$, $PC=5$. חשבו את PA ואת אורך צלע המשולש ABC.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 6 טריגונומטריה

מעגל היחידה · זהויות ומשוואות · משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים · שטח משולש

תזכורת קצרה

מעגל היחידה — $\cos\alpha$ ו־$\sin\alpha$ הם שיעורי הנקודה המתאימה לזווית α על מעגל היחידה.
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$,
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

משוואות בסיסיות — ל־$\sin x=a$ יש (בדרך כלל) שני פתרונות בתחום $0^\circ\le x<360^\circ$: x_1 ו־$180^\circ-x_1$ (אם x_1 שלילי — מוסיפים לו 360°). ל־$\cos x=a$: x_1 ו־$360^\circ-x_1$.

משפט הסינוסים — $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ (R — רדיוס המעגל החוסם)

משפט הקוסינוסים — $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. שטח: $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

חלק א' – מעגל היחידה

51 א. חשבו בלי מחשבון: $\sin 150^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\tan 315^\circ$, $\sin 240^\circ$, $\cos 300^\circ$, $\tan 120^\circ$.

ב. פשטו את הביטוי $E=\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\cos(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)$, וחשבו את ערכו עבור $\alpha=30^\circ$.

ג. נתון: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, וגם $90^\circ<\alpha<180^\circ$. חשבו את $\cos\alpha$ ואת $\tan\alpha$.

52 פתרו בתחום $0^\circ\le x\le 360^\circ$.

א. $2\sin x=1$

ב. $2\cos^2 x-\cos x=0$

ג. $2\sin^2 x+3\cos x=3$

ד. $\tan x=2\sin x$

53 הוכחה הוכיחו את הזהויות:

א. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

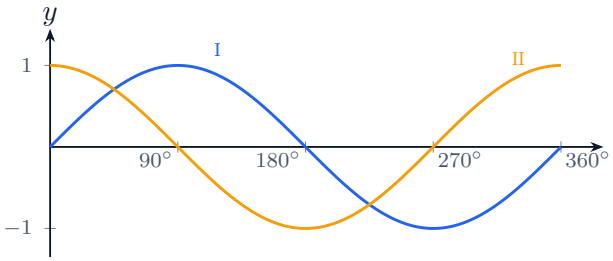
ב. $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

ג. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\tan^2\alpha$

ד. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

© אור בן שטרית · אינסוף

54



בסרטוט מתוארים הגרפים של $y=\sin x$ ושל $y=\cos x$ בתחום $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

א. קבעו איזה מהגרפים, I או II, הוא הגרף של כל אחת מהפונקציות, ונמקו.

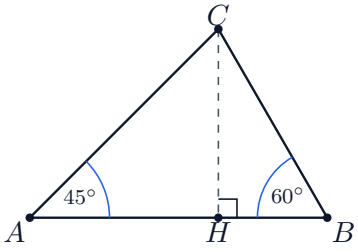
ב. מצאו אלגברית את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. היעזרו בסרטוט ופתרו: $\sin x > \cos x$.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y=2\sin x+1$ עם ציר ה־x, ואת הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

חלק ב' – טריגונומטריה במישור

55



במשולש ABC נתון: $\sphericalangle A=45^\circ$, $\sphericalangle B=60^\circ$, $AC=6\sqrt{6}$ ס"מ. CH הוא הגובה לצלע AB.

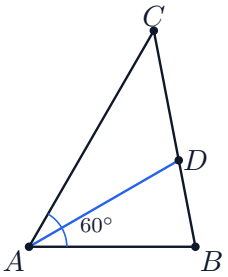
א. חשבו את BC בעזרת משפט הסינוסים.

ב. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

ג. חשבו את CH, AH ו־HB, ומצאו את AB בצורה מדויקת.

ד. חשבו את שטח המשולש בצורה מדויקת.

56



במשולש ABC נתון: $AB=2k$, $AC=3k$, $\sphericalangle BAC=60^\circ$.

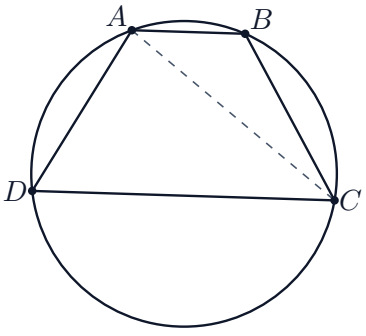
א. הביעו את BC באמצעות k.

ב. הביעו את שטח המשולש באמצעות k. נתון ששטח המשולש הוא $6\sqrt{3}$ סמ"ר — מצאו את k.

ג. AD חוצה את הזווית A. חשבו את אורכו **בעזרת שטחים**: $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$.

ד. חשבו את BD ואת DC.

57



המרובע $ABCD$ חסום במעגל. נתון: $AB=3$, $BC=5$, $CD=8$, $DA=5$.

א. הביעו את AC^2 פעם בעזרת $\cos\sphericalangle B$ ופעם בעזרת $\cos\sphericalangle D$. מה הקשר בין $\cos\sphericalangle B$ ל־$\cos\sphericalangle D$? נמקו.

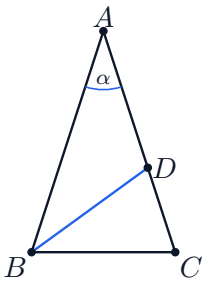
ב. מצאו את הזווית B ואת אורך האלכסון AC.

ג. חשבו את רדיוס המעגל.

ד. חשבו את שטח המרובע.

© אור בן שטרית · אינסוף

58 במשולש שווה־שוקיים ABC ($AB=AC$) נתון: $BC=10$ ס"מ ו־$\sphericalangle BAC=\alpha$. BD חוצה את הזווית B (D על AC).



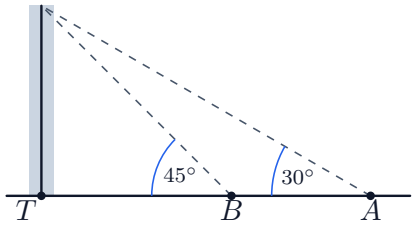
א. הביעו באמצעות α את הזוויות של המשולש BDC.

ב. הראו כי $BD=\dfrac{10\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}$.

ג. חשבו את BD עבור $\alpha=36^\circ$. **חשיבה** הסבירו את התוצאה בעזרת הזוויות של המשולשים BDC ו־ABD.

ד. **אתגר ★** עבור $\alpha=36^\circ$ חשבו את AC (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית) ואת היחס $AC:BC$. איזה מספר מפורסם קיבלתם?

59 **אוריינות** שני צופים, A ו־B, עומדים על קו ישר אחד עם T, בסיס המגדל, ושניהם באותו צד של המגדל. המרחק ביניהם 400 מ'. A רואה את ראש המגדל בזווית הגבהה של 30°, ו־B — בזווית של 45°.



א. הראו כי גובה המגדל הוא $200(\sqrt{3}+1)$ מ'.

ב. צופה שלישי עומד בין A ל־B ורואה את ראש המגדל בזווית של 40°. מה המרחק שלו מבסיס המגדל? (בדיוק של מטר אחד)

60 **חשיבה** במשולש ABC נתון: $AB=10$, $\sphericalangle A=40^\circ$, ואורך הצלע BC משתנה.

א. נתון $BC=7$. הראו שיש **שני** משולשים שונים המתאימים לנתונים, וחשבו בכל אחד מהם את הזווית C ואת אורך הצלע AC.

ב. עבור אילו אורכים של BC יש משולש אחד בלבד? ועבור אילו אורכים אין אף משולש?
(רמז: סרטטו את הקרן AC ומעגל שמרכזו B ורדיוסו BC.)

61 **אתגר ★** **הוכחה**

א. הוכיחו שבכל משולש: $S=\dfrac{abc}{4R}$.

ב. במשולש שאורכי צלעותיו 13, 14 ו־15 ס"מ חשבו את הגובה לצלע שאורכה 14 (היעזרו במשפט פיתגורס בשני המשולשים שהגובה יוצר), את שטח המשולש ואת רדיוס המעגל החוסם.

© אור בן שטרית · אינסוף

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

62 אתגר ★ במשולש ABC נתון: $BC=7$, $AC=8$, $AB=5$.

א. הראו כי $\sphericalangle A=60^\circ$.

ב. חשבו את שטח המשולש, את רדיוס המעגל החוסם R ואת רדיוס המעגל החסום r.
(רמז: חלקו את המשולש לשלושה משולשים שקודקודם המשותף הוא מרכז המעגל החסום, והראו כי $S=r\cdot\frac{a+b+c}{2}$.)

ג. חשבו את R^2-2Rr. לפי נוסחת אוילר (תרגיל 47) זה ריבוע המרחק בין מרכזי שני המעגלים.

63 אתגר ★ הוכחה

א. הוכיחו שבכל משולש חד־זוויות $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$. (רמז: הגובה מהקודקוד A.)

ב. הראו שהנוסחה נכונה גם כאשר הזווית β קהה.

ג. היעזרו במשפט הסינוסים והסיקו: $\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$, לכל β ו־γ חיוביות שסכומן קטן מ־180°.

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 7 נגזרת של פולינום

הגדרת הנגזרת · מכפלה והרכבה · משיקים · חקירה · f ו־f' · פרמטרים

תזכורת קצרה

הגדרה	$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ — שיפוע המשיק, קצב השינוי הרגעי. קצב שינוי ממוצע ב־$[a,b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
כללי גזירה	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $\quad[f\cdot g]'=f'g+fg'$ $\quad[f(u(x))]'=f'(u)\cdot u'(x)$, למשל: $[(2x-1)^5]'=5(2x-1)^4\cdot 2$
משיק	$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. משיק מנקודה **שאינה** על הגרף: מסמנים את נקודת ההשקה $(a,f(a))$ ודורשים שהמשיק יעבור בנקודה הנתונה.
קיצון	$f'(x_0)=0$ **וגם** f' מחליפה סימן ב־x_0. אם f' מתאפסת בלי להחליף סימן — אין קיצון.

64 א. מצאו לפי הגדרת הנגזרת את $f'(x)$ עבור $f(x)=x^2-3x$.

ב. מצאו לפי ההגדרה את $g'(2)$ עבור $g(x)=x^3$.

ג. חשבו את קצב השינוי הממוצע של $g(x)=x^3$ בקטע $[1,3]$, ומצאו ערך c בקטע שעבורו קצב השינוי הרגעי שווה לקצב הממוצע.

ד. **חשיבה** הוכיחו שעבור כל פונקציה ריבועית $q(x)=Ax^2+Bx+C$, קצב השינוי הממוצע בקטע $[p,r]$ שווה לנגזרת באמצע הקטע, $q'\left(\frac{p+r}{2}\right)$.

65 גזרו ופרקו את הנגזרת לגורמים.

א. $f(x)=(x^2-1)^5$ **ב.** $g(x)=x^3(2x-1)^4$

ג. $h(x)=(3x+1)^2(x-2)^3$. מצאו את הנקודות שבהן $h'(x)=0$, וקבעו אילו מהן הן נקודות קיצון ומה סוגן. הסבירו מה קורה ב־$x=2$.

66 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3x^2+4$.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x=3$.

ב. המשיק מסעיף א חותך את הגרף בנקודה נוספת. מצאו אותה.

ג. מצאו את משוואת המשיק ששיפועו -3, והסבירו מדוע זהו השיפוע הקטן ביותר של משיק לגרף.

ד. **אתגר ★** מצאו את כל המשיקים לגרף שעוברים דרך ראשית הצירים. מה מפתיע בתשובה?

67 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3a^2x+2a^3$, כאשר $a>0$.

א. הראו כי $f(x)=(x-a)^2(x+2a)$, ומצאו את נקודות החיתוך עם ציר ה־x.

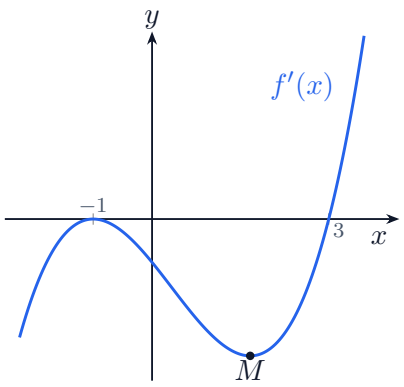
ב. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן (הביעו באמצעות a). סרטטו סקיצה.

ג. עבור איזה ערך של a נקודת המקסימום נמצאת על הישר $y=-4x$?

© אור בן שטרית · אינסוף

ד. **אתגר** הראו שלכל $a>0$ נקודת המקסימום של f נמצאת על הגרף של הפונקציה $y=-4x^3$.

68 בסרטוט מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של פולינום $f(x)$. הגרף משיק לציר ה־x ב־$x=-1$, חותך אותו ב־$x=3$, והנקודה M היא נקודת המינימום שלו, ב־$x=\frac{5}{3}$.



א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של f.

ב. מצאו את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של f וקבעו את סוגן. מה קורה ל־f ב־$x=-1$?

ג. באיזו נקודה בקטע $[-1,3]$ הגרף של f יורד בצורה התלולה ביותר? נמקו.

ד. נתון: $f(3)=-5$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$? ועבור איזה ערך של k יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד?

69 **אתגר** לפונקציה $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2$ יש ב־$x=2$ נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, אך היא **אינה** נקודת קיצון.

א. הראו כי $f'(x)=x\left(12x^2+3ax+2b\right)$, והסבירו מדוע בהכרח $12x^2+3ax+2b=12(x-2)^2$.

ב. מצאו את a ואת b.

ג. מצאו את כל נקודות הקיצון של f, והוכיחו כי $f(x)\geq 0$ לכל x.

70 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$.

א. מצאו (באמצעות k) את נקודות הקיצון של f.

ב. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $f(x)=0$ שלושה פתרונות? שני פתרונות? פתרון אחד?

ג. פתרו את המשוואה $f(x)=0$ עבור $k=-4$ ועבור $k=0$. מה משותף לשני המקרים?

71 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3x$.

א. מצאו שתי נקודות על הגרף שהמשיקים בהן מקבילים זה לזה, והמרחק האופקי ביניהן הוא 4.

ב. מצאו את משוואות שני המשיקים.

ג. הראו שאמצע הקטע המחבר את שתי הנקודות הוא ראשית הצירים, והסבירו זאת בעזרת תכונה של f.

ד. **הוכחה** הוכיחו: אם f אי־זוגית וגזירה, אז המשיקים לגרף ב־$x=a$ וב־$x=-a$ מקבילים.

72 **חשיבה** קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה. אם כן — נמקו; אם לא — תנו דוגמה נגדית.

א. אם $f'(x_0)=0$, אז ל־f יש נקודת קיצון ב־x_0.

ב. אם f עולה בקטע, אז $f'(x)>0$ לכל x בקטע.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג. אם f פולינום זוגי, אז f' פולינום אי־זוגי.

ד. אם $f'(x) > 0$ לכל x, אז למשוואה $f(x) = 0$ יש לכל היותר פתרון אחד.

ה. לכל פולינום ממעלה שלישית יש נקודת קיצון.

ו. אם המשיק לגרף של f בנקודה $x = a$ עובר דרך ראשית הצירים, אז $f(a) = a \cdot f'(a)$.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

73 אתגר ★ מצאו את כל הישרים המשיקים גם לגרף של $y = x^2$ וגם לגרף של $y = -x^2 + 4x - 4$.

(רמז: כתבו משיק כללי לכל אחד מהגרפים — בנקודות $x = a$ ו־$x = b$ — והשוו שיפועים ונקודות חיתוך עם ציר ה־y.)

74 אתגר ★ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2(x-2)^2 + k$.

א. הוכיחו שהגרף של f סימטרי ביחס לישר $x = 1$.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של f וקבעו את סוגן.

ג. עבור אילו ערכים של k יש לגרף בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־x? בדיוק ארבע? בדיוק שתיים? ועבור אילו ערכים אין לגרף נקודות חיתוך עם ציר ה־x?

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 8 פונקציית שורש

תחום הגדרה · נגזרת של שורש ושל הרכבה · משיקים · חקירה · פרמטרים

תזכורת קצרה

תחום $\sqrt{u(x)}$ מוגדרת כאשר $u(x) \geq 0$. במכנה: $u(x) > 0$. זהירות: $\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}$ ו־$\sqrt{u \cdot v}$ אינן אותה פונקציה!

נגזרת $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

מכפלה: $(g\sqrt{u})' = g'\sqrt{u} + g \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

חקירה בודקים גם את **קצות תחום ההגדרה**: שם עשויות להיות נקודות קיצון (קיצון בקצה).

75 א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ושל $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{x+2}$.

ב. **חשיבה** מצאו את תחומי ההגדרה של $p(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)}$ ושל $q(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4}$. האם p ו־q הן אותה פונקציה? הסבירו.

ג. תחום ההגדרה של $h(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 12}$ הוא $-2 \leq x \leq 3$. מצאו את a ואת b.

ד. עבור אילו ערכים של c הפונקציה $k(x) = \sqrt{x^2 + 2x + c}$ מוגדרת לכל x?

76 א. מצאו את משוואת המשיק לגרף $y = \sqrt{x}$ העובר דרך הנקודה $(-4, 0)$. (רמז: סמנו את נקודת ההשקה $(t, \sqrt{t})$.)

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף $y = \sqrt{2x+1}$ המקביל לישר $y = \frac{1}{3}x$.

77 נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של f (כולל קיצון בקצה התחום) וקבעו את סוגן. מצאו את תחומי העלייה והירידה, וסרטטו סקיצה.

ד. מצאו את משוואת המשיק בראשית הצירים.

ה. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות בדיוק?

78 נתונה הפונקציה $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + a}$, כאשר $a > 0$.

א. מצאו את תחום ההגדרה, והראו שהנגזרת מתאפסת רק ב־$x = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

ב. הראו שלפונקציה יש מקסימום ושערכו $-\sqrt{3a}$.

ג. נתון שערך המקסימום הוא -6. מצאו את a, ואת נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה־y.

© אור בן שטרית · אינסוף

ד. **חשיבה** הסבירו מדוע, לכל $a > 0$, הגרף של f אינו חותך את ציר ה־x.

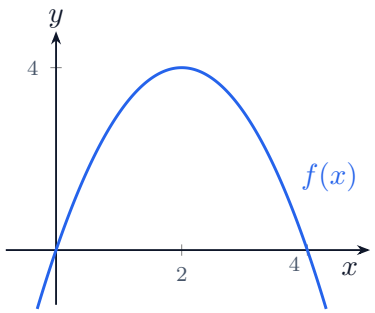
79 הנקודה P נמצאת על הגרף של $y = \sqrt{x}$, והנקודה A היא $(4.5,\ 0)$.

א. הביעו את AP^2 באמצעות שיעור ה־x של P.

ב. מצאו את הנקודה P הקרובה ביותר ל־A, ואת המרחק המינימלי.

ג. **חשיבה** הראו שהקטע AP מאונך למשיק לגרף בנקודה P. האם זה מקרי?

80 בסרטוט מתואר הגרף של $f(x) = 4x - x^2$. נגדיר $g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{4x - x^2}$.



א. מצאו את תחום ההגדרה של g ואת נקודות הקיצון שלה (כולל בקצות התחום).

ב. הראו שהגרף של g הוא חצי מעגל. מה מרכזו ומה רדיוסו?

ג. פתרו את המשוואה $f(x) = g(x)$, ומצאו עבור אילו ערכי x מתקיים $g(x) > f(x)$.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף של g ב־$x = 1$, והראו שהוא מאונך לרדיוס של חצי המעגל בנקודה זו.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

81 **אתגר ★** נתונה הפונקציה $F(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 25}$.

א. מצאו בעזרת הנגזרת את הערך המינימלי של F, ואת x שבו הוא מתקבל.

ב. **חשיבה** הסבירו מדוע $F(x)$ הוא סכום המרחקים מהנקודה $(x, 0)$ אל הנקודות $A(0,\ 3)$ ו־$B(8,\ 5)$. פתרו את סעיף א מחדש בלי נגזרת, בעזרת שיקוף של B בציר ה־x.

82 **אתגר ★** נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a - x}$, כאשר $a > 0$.

א. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון שבתוך התחום.

ב. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של f.

ג. עבור אילו ערכים של a יש למשוואה $f(x) = 4$ שני פתרונות בדיוק?

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 9 פונקציה רציונלית

תחום הגדרה · אסימפטוטות · אי־רציפות סליקה · נגזרת של מנה · חקירה · פרמטרים

תזכורת קצרה

אסימפטוטה אנכית	$x=x_0$ שבו המכנה מתאפס והמונה **אינו** מתאפס (אחרי צמצום).
"חור" (אי־רציפות סליקה)	x_0 שבו מתאפסים גם המונה וגם המכנה, וגורם $(x-x_0)$ מצטמצם לגמרי מהמכנה. שיעור ה־y של החור מחושב מהביטוי המצומצם.
אסימפטוטה אופקית	מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה: $y=0$. מעלות שוות: $y=\frac{a}{b}$, כאשר a ו־b הם המקדמים המובילים של המונה ושל המכנה. מעלת המונה גדולה יותר: אין אסימפטוטה אופקית.
נגזרת של מנה	$\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ וגם: $\left[\frac{1}{g}\right]'=-\frac{g'}{g^2}$

83 לכל פונקציה מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות המאונכות לצירים ואת נקודות אי־הרציפות הסליקה (אם יש).

א. $f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-x-2}$

ב. $g(x)=\frac{x^2+1}{(x-2)^2}$

ג. $h(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}$

ד. $k(x)=\frac{3x-1}{x^2+2}$

חשיבה בסעיף ב: האם הגרף חותך את האסימפטוטה האופקית שלו? אם כן — היכן? ובסעיף ג: מה צורת הגרף?

84 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+bx+6}{x^2-cx-8}$. נתון כי ל־$f$ יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, $x=4$, וכי ב־$x=-2$ יש לה אי־רציפות סליקה. כמו כן, $y=3$ היא אסימפטוטה אופקית של f.

א. מצאו את c, אחר כך את a ולבסוף את b.

ב. מצאו את שיעורי ה"חור", ואת נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של f, וסמנו בה את ה"חור".

85 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות המאונכות לצירים ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

ב. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.

ג. **חשיבה** ערך המקסימום המקומי קטן מערך המינימום המקומי. איך זה ייתכן? היעזרו בסקיצה.

© אור בן שטרית · אינסוף

86 נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$.

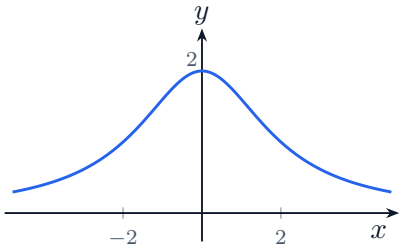
א. מצאו את תחום ההגדרה, הראו שהפונקציה זוגית, ומצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים.

ב. הראו כי $f'(x)=\dfrac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$, ומצאו את נקודות הקיצון ואת סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של הגרף.

ד. קבעו, לכל ערך של k, כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=k$.

87 בסרטוט מתואר הגרף של $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$.



א. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה של f.

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף ב־$x=2$, והראו שהוא עובר דרך נקודת הקיצון.

ג. בלי חישוב נוסף, מצאו את משוואת המשיק ב־$x=-2$. נמקו.

ד. חשבו את שטח המשולש שיוצרים שני המשיקים עם ציר ה־x.

88 נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x-3$ ו־$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של g ואת האסימפטוטות שלה.

ב. הראו כי $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, ומצאו את נקודת הקיצון של g ואת סוגה. **חשיבה** הסבירו מדוע הקיצון של g נמצא בדיוק מעל הקיצון של f, אך מסוג הפוך.

ג. סרטטו את f ואת g באותה מערכת צירים.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=g(x)$? מצאו אותם. (רמז: $f=\frac{1}{f}$ אם ורק אם $f^2=1$.)

89 **אתגר ★** נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x^2-4x+a}$.

א. עבור אילו ערכים של a הפונקציה מוגדרת לכל x?

ב. עבור אילו ערכים של a הגרף אינו חותך את ציר ה־x?

ג. הראו כי $f'(x)=\dfrac{-6(x^2-a)}{(x^2-4x+a)^2}$.

ד. מכאן והלאה נתון $a=9$. מצאו את נקודות הקיצון, את האסימפטוטה האופקית ואת הנקודה שבה הגרף חותך אותה. סרטטו סקיצה.

ה. עבור $a=9$: קבעו, לכל ערך של k, כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=k$.

© אור בן שטרית · אינסוף

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

90 אתגר★ נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$, כאשר $a\neq 0$.

א. הראו ששיעורי ה־x של נקודות הקיצון הם הפתרונות של $ax^2+2bx-a=0$, והסבירו מדוע תמיד יש בדיוק שתי נקודות קיצון.

ב. חשיבה הוכיחו: אם ב־x_0 יש נקודת קיצון, אז גם ב־$-\frac{1}{x_0}$ יש נקודת קיצון.

ג. נתון שלפונקציה יש מקסימום בנקודה $(2,\,1)$. מצאו את a ואת b, ואת נקודת הקיצון השנייה.

ד. מצאו את כל הערכים ש־f מקבלת (הטווח שלה).

91 אתגר★ נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+bx+c}{x^2-4x+3}$. לגרף יש "חור" (אי־רציפות סליקה) בנקודה $(1,\,2)$.

א. מצאו את b ואת c, וכתבו את f בצורה מצומצמת.

ב. מצאו את האסימפטוטות, והסבירו מדוע הגרף אף פעם אינו חותך את האסימפטוטה האופקית שלו.

ג. מצאו את משוואות המשיקים לגרף שמקבילים לישר $y=2x$.

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

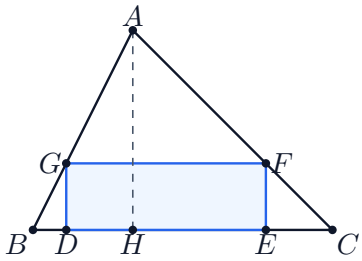
פרק 10 בעיות קיצון

פולינום · שורש · מנה — בעיות גאומטריות, גרפיות וכלכליות

שיטת העבודה בבעיית קיצון

1. בוחרים משתנה אחד (x) ומסמנים אותו בסרטוט. כותבים מה הוא מייצג ומהו **התחום** שלו.
2. מביעים את הגודל שרוצים להביא לקיצון כפונקציה של x בלבד (משתמשים בנתונים כדי לבטל משתנים נוספים).
3. גוזרים, משווים לאפס, ו**מוכיחים** שזה אכן מקסימום/מינימום — בטבלת סימנים, ובתחום סגור גם בדיקת הקצוות.
4. עונים בדיוק על מה שנשאל (הממדים? הערך? הנקודה?), עם יחידות.

92 במשולש ABC נתון: $BC = 18$ ס"מ, והגובה AH לצלע BC הוא 12 ס"מ. במשולש חסום מלבן $DEFG$: הצלע DE על BC, הקודקוד F על AC והקודקוד G על AB. נסמן ב־x את גובה המלבן ($x = GD$).

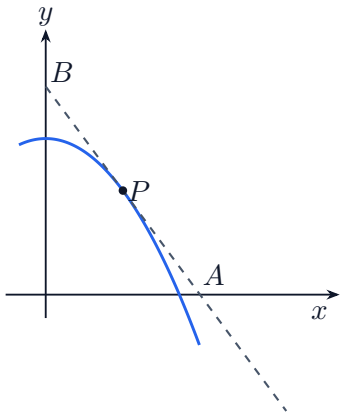


א. הביעו את GF באמצעות x. (רמז: $\triangle AGF \sim \triangle ABC$.)

ב. מצאו את ממדי המלבן ששטחו מקסימלי, ואת השטח המקסימלי.

ג. **הוכחה** הוכיחו שבכל משולש (בסיס a, גובה h) שטח המלבן הגדול ביותר מסוג זה שווה בדיוק למחצית שטח המשולש.

93 הנקודה $P(t,\ 4-t^2)$ נמצאת על הגרף של $f(x) = 4 - x^2$, כאשר $0 < t < 2$. המשיק לגרף בנקודה P חותך את החלקים החיוביים של הצירים בנקודות A (על ציר ה־x) ו־B (על ציר ה־y).



א. מצאו את משוואת המשיק ואת שיעורי A ו־B (באמצעות t).

ב. הראו ששטח המשולש AOB (O — ראשית הצירים) הוא $S(t) = \dfrac{(t^2+4)^2}{4t}$.

ג. מצאו את t שעבורו השטח מינימלי, ואת השטח המינימלי.

94 מלבן חסום בין הגרף של $y = 9 - x^2$ לבין ציר ה־x, כך שצלע אחת שלו על ציר ה־x ושני קודקודים על הפרבולה.

א. מצאו את ממדי המלבן ששטחו מקסימלי.

ב. מצאו את ממדי המלבן שהיקפו מקסימלי.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג. **חשיבה** האם זה אותו מלבן? מה אפשר ללמוד מכך?

95 **אוריינות** חנות מוכרת x יחידות של מוצר ביום, כאשר מחיר יחידה (בש"ח) הוא $p = 60 - \frac{x}{2}$. עלות הקנייה של כל יחידה היא 20 ש"ח, ויש עוד הוצאה קבועה של 300 ש"ח ביום.

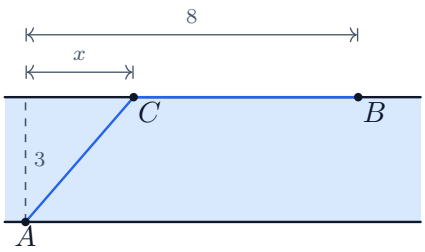
א. הראו שהרווח היומי הוא $P(x) = 40x - \frac{x^2}{2} - 300$.

ב. כמה יחידות כדאי למכור ביום, באיזה מחיר, ומה הרווח המקסימלי?

ג. המדינה מטילה מס של t ש"ח על כל יחידה. הראו שהכמות המיטבית יורדת ל־$40 - t$, ושהמחיר המיטבי עולה רק ב־$\frac{t}{2}$.

ד. **אתגר ★** החל מאיזה מס (בדיוק של אגורה) כבר אין לחנות אפשרות להרוויח?

96 **אוריינות** רוחבו של נהר הוא 3 ק"מ. מתחנת חשמל A שעל גדה אחת צריך להעביר כבל אל מפעל B שעל הגדה השנייה, 8 ק"מ במורד הנהר. עלות הנחת כבל מתחת למים היא 5 מיליון ש"ח לק"מ, ועל היבשה — 4 מיליון ש"ח לק"מ. הכבל עובר מתחת למים מ־A אל נקודה C שעל הגדה השנייה, ומשם על היבשה עד B.

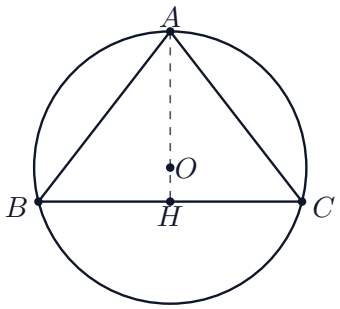


א. נסמן ב־x את המרחק מהנקודה שמול A אל C. הביעו את העלות הכוללת באמצעות x.

ב. מצאו את x שעבורו העלות מינימלית, ואת העלות המינימלית.

ג. השוו לשתי האפשרויות "הקיצוניות": כל הכבל מתחת למים, או חציית הנהר בניצב ואז הנחת הכבל לאורך הגדה.

97 משולש שווה־שוקיים חסום במעגל שרדיוסו 6 ס"מ. נסמן ב־h את גובה המשולש לבסיס (הגובה עובר דרך מרכז המעגל).



א. הראו שחצי הבסיס של המשולש הוא $\sqrt{12h - h^2}$, ושהשטח הוא $S(h) = h\sqrt{12h - h^2}$. מהו תחום ההגדרה?

ב. מצאו את h שעבורו השטח מקסימלי, ואת השטח המקסימלי.

ג. **חשיבה** חשבו את אורכי כל הצלעות של המשולש ששטחו מקסימלי. איזה משולש התקבל?

98 **אתגר ★** ישר בעל שיפוע שלילי עובר דרך הנקודה $P(2,\ 8)$ וחותך את הצירים החיוביים בנקודות A (על ציר ה־x) ו־B (על ציר ה־y). נסמן את השיפוע ב־$-k$ ($k > 0$).

א. הביעו את שיעורי A ו־B באמצעות k.

ב. מצאו את משוואת הישר שעבורו שטח המשולש AOB מינימלי, ואת השטח המינימלי.

© אור בן שטרית · אינסוף

ג. מצאו את משוואת הישר שעבורו סכום אורכי הקטעים $OA+OB$ מינימלי.

ד. **חשיבה** הראו שבמקרה של סעיף ב, P היא אמצע הקטע AB.

★ מקבץ אתגר

תרגילים קשים במיוחד — לשאפתנים

99 **אתגר ★** חלון בנוי ממלבן, ומעליו חצי עיגול שקוטרו הוא הצלע העליונה של המלבן. היקף החלון (כולל הקשת) הוא P מטר. נסמן ב־r את רדיוס חצי העיגול.

א. הביעו את גובה המלבן ואת שטח החלון באמצעות r ו־P.

ב. מצאו את r שעבורו שטח החלון — כלומר כמות האור — מקסימלי.

ג. הראו שבחלון המיטבי גובה המלבן שווה בדיוק לרדיוס.

100 **אוריינות** מגיליון קרטון ריבועי שצלעו 12 ס"מ גוזרים מכל פינה ריבוע שצלעו x, ומקפלים את השוליים לקופסה פתוחה.

א. הביעו את נפח הקופסה באמצעות x, ורשמו את התחום של x.

ב. מצאו את x שעבורו הנפח מקסימלי, ואת הנפח המקסימלי.

ג. הראו שבגיליון ריבועי שצלעו a הנפח מקסימלי כאשר $x=\frac{a}{6}$.

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 11 — בוחן מסכם

מבחן בסגנון שאלון 035571 על חומר כיתה י׳ — שש שאלות, 100 נקודות

תנאי המבחן

זמן: שעתיים וחצי. **חומר עזר:** מחשבון רגיל (לא גרפי) ודף הנוסחאות שבסוף החוברת.
ענו על כל השאלות.
כתבו דרך מלאה ומנומקת, כמו בבגרות. רק בסוף — בדקו את התשובות ומלאו את טבלת הציון שבסוף הפרק.

ש1 (15 נקודות)

א. פתרו את המשוואה $\sqrt{x+7}-1=x$.

ב. פתרו את אי־השוויון $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}\geq 0$.

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-x$. כמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)|=0.2$? נמקו בעזרת סקיצה של $|f(x)|$ (היעזרו בערכי הקיצון של f).

ש2 (15 נקודות) הנקודות $A(-3,\,-1)$ ו־$B(5,\,5)$ הן קצות קוטר של מעגל.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. הראו שהנקודה $C(4,\,6)$ נמצאת על המעגל, והוכיחו בעזרת שיפועים כי $\sphericalangle ACB=90^\circ$.

ג. חשבו את שטח המשולש ABC ואת המרחק מהנקודה C לישר AB.

ד. מצאו את הנקודה D שעבורה המרובע $ACBD$ הוא מלבן, והראו שגם היא נמצאת על המעגל.

ש3 (15 נקודות) המשולש ABC חסום במעגל. חוצה הזווית A חותך את הצלע BC בנקודה D, ואת המעגל בנקודה E.

א. **הוכחה** הוכיחו כי $\triangle ABE\sim\triangle ADC$, והסיקו כי $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

ב. נתון: $AB=6$, $AC=8$, $BC=7$. חשבו את BD ואת DC.

ג. היעזרו גם במשפט המיתרים הנחתכים וחשבו את AD ואת DE.

ש4 (15 נקודות) במשולש שווה־שוקיים ABC נתון: $AB=AC=6$ ו־$\sphericalangle BAC=120^\circ$. הנקודה D על BC נבחרה כך ש־$\sphericalangle BAD=90^\circ$.

א. חשבו את BC, BD, DC ו־AD בצורה מדויקת, והראו כי $BD=2\,DC$.

ב. חשבו את שטחי המשולשים ABD ו־ADC.

ג. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD ואת רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADC. מה גיליתם?

© אור בן שטרית · אינסוף

ש5 (20 נקודות) נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{12 - x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה, וקבעו אם הפונקציה זוגית, אי־זוגית או אף אחת מהן.

ב. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון (כולל קיצון בקצות התחום), וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של הגרף.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף בראשית הצירים.

ה. עבור איזה ערך של k יש למשוואה $f(x) = k$ שלושה פתרונות בדיוק?

ש6 (20 נקודות) אוריינות רוצים לגדר גינה מלבנית ששטחה 300 מ"ר, הצמודה לקיר באחת מצלעותיה (לאורך הקיר לא צריך גדר). גדר בשתי הצלעות המאונכות לקיר עולה 15 ש"ח למטר, וגדר בצלע המקבילה לקיר עולה 40 ש"ח למטר.

א. נסמן ב־x את אורך כל אחת מהצלעות המאונכות לקיר. הראו שעלות הגדר היא $C(x) = 30x + \dfrac{12000}{x}$.

ב. מצאו את ממדי הגינה שעבורם העלות מינימלית, ואת העלות המינימלית.

ג. התברר שאורך הקיר 12 מ' בלבד, ולכן הצלע המקבילה לקיר יכולה להיות לכל היותר 12 מ'. מה העלות המינימלית עכשיו? נמקו מדוע התשובה מתקבלת בקצה התחום.

טבלת ציון – איפה אני עומד/ת?

שאלה	נושא	ניקוד	הציון שלי	קיבלתי פחות מחצי? חזרו ל־
1	משוואות, אי־שוויונות, ערך מוחלט של פונקציה	15		פרקים 1, 2, 7
2	גאומטריה אנליטית	15		פרק 3
3	המעגל ודמיון	15		פרקים 4, 5
4	טריגונומטריה במישור	15		פרק 6
5	חקירת פונקציית שורש	20		פרקים 7, 8
6	בעיית קיצון	20		פרק 10
	סה"כ	**100**		

© אור בן שטרית · אינסוף

אני יודע/ת — רשימת בדיקה לפני כיתה י״א

סמנו ✓ ליד כל מיומנות שאתם שולטים בה. מה שלא סימנתם — זה מה שחוזרים עליו בשבוע האחרון.

אלגברה ופונקציות (פרקים 1 ו־2)

- ☐ פותר/ת משוואות עם שברים ועם שורשים, ובודק/ת תחום ופתרונות.
- ☐ פותר/ת אי־שוויון מנה בעזרת טבלת סימנים.
- ☐ מטפל/ת בפרמטר במשוואה ריבועית (כולל מקדם x^2 שמתאפס).
- ☐ מזהה זוגיות ומסרטט/ת סקיצה של פולינום לפי שורשים וריבוי.
- ☐ מסרטט/ת $af(x-p)+k$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ וקובע/ת את מספר הפתרונות של $f(x)=k$.

גאומטריה אנליטית (פרק 3)

- ☐ מרחק, אמצע, שיפוע ומשוואת ישר; מקבילים ומאונכים.
- ☐ משוואת מעגל, נקודה בתוך/על/מחוץ למעגל, משיק בעזרת רדיוס.
- ☐ מוצא/ת בעזרת שיעורים את נקודות המפגש של התיכונים, של הגבהים ושל האנכים האמצעיים.

גאומטריה במישור (פרקים 4 ו־5)

- ☐ קטע אמצעים, מפגש התיכונים $(2:1)$, תאלס והרחבותיו.
- ☐ משפט חוצה הזווית והמשפט ההפוך.
- ☐ מוכיח/ה דמיון ומשתמש/ת ביחס שטחים k^2.
- ☐ זוויות במעגל, משיקים, מרובע חסום ומרובע חוסם.
- ☐ מיתרים נחתכים וחותך־משיק — בעזרת משולשים דומים.
- ☐ כותב/ת הוכחה מסודרת: טענה — נימוק, כולל הוכחה בדרך השלילה.

טריגונומטריה (פרק 6)

- ☐ ערכים מדויקים במעגל היחידה וזהויות בסיסיות.
- ☐ פותר/ת משוואות $\sin x = a$, $\cos x = a$ בתחום $0^\circ \le x < 360^\circ$.
- ☐ משפט הסינוסים (כולל $2R$), משפט הקוסינוסים ושטח משולש.
- ☐ מזהה מתי יש שני משולשים, משולש אחד או אין משולש כלל.

חשבון דיפרנציאלי (פרקים 7 עד 10)

- ☐ נגזרת לפי ההגדרה; כללי גזירה של מכפלה, הרכבה ומנה.
- ☐ משיק בנקודה, משיק בשיפוע נתון, משיק מנקודה חיצונית.
- ☐ חקירה מלאה של פולינום, פונקציית שורש ופונקציה רציונלית.
- ☐ אסימפטוטות וחורים; קיצון בקצה התחום.
- ☐ מסיק/ה תכונות של f מתוך הגרף של f'.
- ☐ פותר/ת בעיית קיצון: משתנה, תחום, פונקציה, הוכחת סוג הקיצון.

© אור בן שטרית · אינסוף

מחברת הטעויות שלי

כל טעות היא הזדמנות. רשמו כאן כל טעות חשובה — ובשבוע האחרון קראו את הטבלה מההתחלה.

תרגיל	במה טעיתי?	למה זה קרה?	הדרך הנכונה

איך משתמשים בטבלה?

אל תסתפקו ב"טעות חישוב". שאלו את עצמכם: האם שכחתי תחום? הצבתי לא נכון בנוסחה? לא בדקתי שהקיצון אכן מקסימום? לא קראתי את כל השאלה? אחרי כמה שורות תגלו שהטעויות שלכם חוזרות על עצמן — וזה בדיוק מה שצריך לתקן לפני כיתה י"א.

© אור בן שטרית · אינסוף

תשובות סופיות

בשאלות הוכחה מופיע לרוב כיוון קצר. בשאלות "סרטטו" — בדקו את הסקיצה מול נקודות החיתוך והקיצון שבתשובה. את העיגול של ערכים מקורבים מבצעים רק בתוצאה הסופית, לא בשלבי הביניים.

פרק 1 – משוואות ואי־שוויונות

1 **א.** $x=-9$ $(x=3$ אינו בתחום) **ב.** $x=3$, $x=-\frac{1}{3}$ **ג.** $x=2\pm\sqrt{3}$ **ד.** זהות: כל x בתחום, כלומר $x\neq\pm1$.

2 **א.** $x=3$ $(x=-1$ נפסל) **ב.** $x=4$ **ג.** $x=5$, $x=8$ **ד.** $x=4$, $x=-1$

3 **א.** $x=\pm2,\ \pm3$ **ב.** $x=-1,\ 1,\ 3$ **ג.** $x=1$, $x=-6$

4 **א.** $-2\le x\le 7$ **ב.** $x<-3$ או $x\ge 4$ **ג.** $-2\le x<-1$ או $1<x\le 3$ **ד.** $-2<x<1$ או $x>2$

5 **א.** $x=2$ **ב.** $m<\frac{3}{2}$, $m\neq 1$ **ג.** $m=1$ $(x=2)$; $m=\frac{3}{2}$ $(x=3)$ **ד.** $-3<m<1$ **ה.** ההצבה נותנת $2=0$.

6 **א.** $(2,3)$, $(3,2)$, $(-2,-3)$, $(-3,-2)$ **ב.** $(2,3)$, $(3,2)$ **ג.** $k>-2$: שתיים; $k=-2$: אחת, $(3,4)$ — הישר משיק לפרבולה; $k<-2$: אין.

7 **א.** $a=6$: $x=3$; $a=0$: $x=0$, $x=1$ **ג.** פתרון אחד: $a>0$ או $a=-\frac{1}{4}$; שניים: $-\frac{1}{4}<a\le 0$; אין: $a<-\frac{1}{4}$ **ד.** a מזיז את גרף השורש a יחידות שמאלה; ב־$a=-\frac{1}{4}$ הישר משיק לגרף.

8 **ב.** ארבעה: $a>0$, $a\neq 1$; שלושה: $a=0$; שניים: $a<0$ או $a=1$

9 $(2,3)$, $(3,2)$, $(1,5)$, $(5,1)$ או $s=5,\ p=6$ $(s=6,\ p=5)$

פרק 2 – פונקציות וטרנספורמציות

10 **א.** זוגיות: x^4-3x^2+1, $\sqrt{4-x^2}$, $\frac{x^2}{x^4+1}$; אי־זוגיות: x^3-5x, $\frac{x^2+1}{x}$, $x|x|$; אף אחת: x^3+x^2, $|x-1|$ **ב.** $(fg)(-x)=(-f)(-g)=fg$ **ג.** $f(0)=-f(0)$ **ד.** רק $f(x)\equiv 0$.

11 **א.** $(0,16)$; נוגע ב־-2, חוצה ב־1 וב־4; בשני הקצוות $\infty+$; $x=-2$ או $1\le x\le 4$ **ב.** $(0,0)$; חוצה ב־0, וב־3 (ריבוי 3) חוצה עם משיק אופקי; בשני הקצוות $\infty-$; $0<x<3$ **ג.** $(0,4)$; חוצה ב־-1, נוגע ב־2; משמאל $\infty-$, מימין $\infty+$; $x\ge -1$

12 **א.** שורש מריבוי זוגי ב־-2 ועוד שני שורשים **ב.** $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)(x-3)$ **ג.** $f(2)=8$ **ד.** $1<x<3$

13 **א.** מקס' $(1,3)$, מינ' $(3,-1)$ **ב.** מקס' $(1,4)$, מינ' $(-1,-4)$ **ג.** מקס' $(1,2)$, מינ' $(-1,-2)$; f אי־זוגית **ד.** מקס' $(\pm1,2)$; מינ' $(0,0)$, $(\pm\sqrt{3},0)$ **ה.** מקס' $(0,0)$, מינ' $(\pm1,-2)$ **ו.** 6 פתרונות; $k=0$.

14 **א.** $(3,2)$, $(-2,-3)$ **ב.** $x<-2$ או $0<x<3$ **ג.** $-2\sqrt{6}<k<2\sqrt{6}$

15 **א.** $x<-1$ או $x>1$ **ב.** $-1<x<0$ או $x>1$ **ג.** $0\le x\le 2$

16 **א.** קודם $f(|x|)$, אחר כך ערך מוחלט של התוצאה **ב.** $k<0$: 0; $k=0$: 4; $0<k<1$: 8; $k=1$: 6; $1<k<8$: 4; $k=8$: 3; $k>8$: 2 **ג.** $k=8$: $x=0,\ \pm6$

17 **א.** נכון **ב.** נכון **ג.** נכון **ד.** לא נכון $(f(x)=x)$ **ה.** לא נכון $(x=\frac{1}{2})$ **ו.** נכון: מינ' $(\pm2,-4)$, מקס' $(0,0)$

18 **א.** x^4-5x^2+4 **ב.** $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$ **ג.** מקס' $(0,4)$, מינ' $(\pm\sqrt{2.5},-\frac{9}{4})$ **ד.** שישה: $k=\frac{9}{4}$; שלושה: $k=4$

19 **א.** $g(x)=2f(x-1)+3$ **ב.** מקס' $(0,7)$, מינ' $(2,-1)$ **ג.** הגרף סימטרי ביחס לנקודה $(1,3)$

© אור בן שטרית · אינסוף

פרק 3 – גאומטריה אנליטית

20 **א.** $m_{CA}=\frac{1}{3}$, $m_{CB}=-3$
ב. $(x-2)^2+(y+1)^2=20$ **ג.** $y=2x-5$,
$D(2,-1)$ — אמצע AB; המשולש ישר־זווית ושווה־שוקיים **ד.** $E(0,-5)$

21 **א.** $D(3,8)$ **ב.** $AB=BC=2\sqrt{10}$; שיפועי האלכסונים 1 ו־-1 **ג.** 32
ד. $(x-5)^2+(y-6)^2=\frac{32}{5}$

22 **ב.** $y=-\frac{3}{4}x+7.5$ **ג.** 37.5 **ד.** $B(0,-5)$,
$(3,-6)$, $(3,4)$ **ה.** $y=-\frac{3}{4}x-5$

23 **א.** $(4\pm\sqrt{17},\,0)$ **ב.** $P(3,0)$; לא:
$PA^2+PB^2=40\neq 72=AB^2$

24 **א.** $O(4,2)$, $R=2\sqrt{5}$ **ב.** $G(\frac{10}{3},2)$ **ג.** $H(2,2)$
ד. כולן על $y=2$; $HG=\frac{4}{3}$, $GO=\frac{2}{3}$

25 **א.** $(4,3)$, $y=-1.5x+9$ **ב.** $(2,6)$, $(6,0)$,
ג. 26 **ד.** $(x-4)^2+(y-3)^2=13$;
$(x-4)^2+(y-3)^2=6.5$

26 **א.** $(-1,-1)$, $(6,6)$ **ב.** $7\sqrt{2}\approx 9.9$ ק"מ
ג. $(2.5,2.5)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.71$ ק"מ **ד.** האנך מהמרכז למיתר חוצה אותו.

27 **א.** $-1<k<3$ **ב.** $y=x+1$ **ג.** $(-1,0)$,
$(3,4)$ — הן מתאימות ל־$k=-1$ ול־$k=3$.

28 $(x-3)^2+(y-5)^2=20$ (המרכז $(3,5)$; האנך האמצעי: $y=-3x+14$)

29 $B(2.5,\,5)$, $D(5.5,\,-1)$ (או להפך)

פרק 4 – תאלס, חוצה זווית ודמיון

30 **א.** EF ו־HG מקבילים ל־AC ושווים ל־$\frac{1}{2}AC$
ב. מלבן: $AC\perp BD$; מעוין: $AC=BD$;
ריבוע: שניהם **ד.** היקף 24 ס"מ, שטח 35 סמ"ר

31 **א.** $5,\ 10,\ 4,\ 8$; $AB=2\sqrt{41}$ **ב.** 120 סמ"ר
ג. $3\sqrt{41}$ **ד.** $BC=4\sqrt{29}$, $AC=2\sqrt{89}$

32 **א.** $1:2$ **ב.** $MO=ON=4$ **ג.** $1:4:2:2$
ד. $MO=\frac{ab}{a+b}=ON$

33 **א.** $BD=6$, $DC=4$, $AE=\frac{48}{11}$, $EC=\frac{40}{11}$
ב. $2:1$ **ג.** $\frac{12+8}{10}=2$

34 **א.** $3:4$ **ב.** 12 סמ"ר כל אחד **ג.** 112 סמ"ר

35 **ג.** $3:1$ **ד.** 15 סמ"ר ו־5 סמ"ר

36 **א.** $1:3$ **ב.** 72 סמ"ר **ג.** 33 סמ"ר **ד.** 108 סמ"ר

37 **ב.** $CD=6$, $AC=2\sqrt{13}$, $BC=3\sqrt{13}$
ג. $4:9$ **ד.** 1.2 ס"מ

38 **א.** $\triangle CBP\sim\triangle CAB$ (ז.ז) **ב.** $BC=6$
ג. למשל $AC=9$, $AB=7$, $BC=12$

39 **א.** $DE=AE=3.6$
ב. $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BAD=\sphericalangle DAE$
ג. $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$

40 **ג.** 81 סמ"ר (יחסי הדמיון $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$)

פרק 5 – המעגל

41 **ב.** $\overset{\frown}{CD}=60°$, $50°$, $30°$ **ד.** $ED=3$

42 **א.** $180°-2\beta$, $90°-\beta$ **ג.** $PO=13$,
$AB=\frac{120}{13}$ ס"מ **ד.** 8 ס"מ

43 **א.** 6.5 ס"מ **ב.** 6 ס"מ, $r=3$ ס"מ
ג. $h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=ab$ ו־$r=\frac{h}{2}$
ד. $\frac{72}{13}$ ס"מ

44 **ג.** $PT=6$ ס"מ, $TA:TB=2:3$
ד. $CD=9$ ס"מ

45 **א.** אמצע BC ($\sphericalangle BEC=\sphericalangle BDC=90°$)
ד. $AD=\frac{1}{2}AB$, יחס הדמיון $\frac{1}{2}$
ה. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2.89$ ס"מ

46 **א.** זווית נגדיות שוות וסכומן $180°$ **ב.** זווית הבסיס שוות (נשענות על קשתות שוות)
ג. זווית בין משיק למיתר שווה לזווית הבסיס — זווית מתחלפות **ד.** נקודת חיתוך שנייה Q של הישר עם המעגל נותנת משולש OPQ עם שתי זווית ישרות — סתירה.

47 **א.** $r=3$ **ב.** $R=8.5$, אמצע היתר **ג.** $I(3,3)$,
$O(4,7.5)$, $OI=\frac{\sqrt{85}}{2}\approx 4.61$
ד. $72.25-51=21.25$

© אור בן שטרית · אינסוף

48 **א.** $MA = MT = MB$ (משיקים מנקודה) **ב.** 12 ס"מ **ג.** $AB^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1 r_2$ **ד.**

49 $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE = \sphericalangle AEH = \sphericalangle MEC$, ולכן $ME = MC$; באותו אופן $ME = MD$.

50 **א.** $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BPA = 60°$ **ב.** $PA = 8$; צלע 7 ($\sphericalangle BPC = 120°$)

פרק 6 – טריגונומטריה

51 **א.** $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}$ **ב.** $E = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; $-\frac{1}{2}$ **ג.** $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$

52 **א.** $30°, 150°$ **ב.** $60°, 90°, 270°, 300°$ **ג.** $0°, 60°, 300°, 360°$ **ד.** $0°, 60°, 180°, 300°, 360°$

53 מעבירים הכול ל־$\sin$ ו־$\cos$ ומשתמשים ב־$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; בסעיף ד — הפרש ריבועים.

54 **א.** I — $\sin x$ (עובר בראשית), II — $\cos x$ **ב.** $(45°, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(225°, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ **ג.** $45° < x < 225°$ **ד.** $210°$, $330°$; ערך גדול ביותר 3, ערך קטן ביותר -1

55 **א.** 12 **ב.** $6\sqrt{2}$ **ג.** $CH = AH = 6\sqrt{3}$, $HB = 6$, $AB = 6 + 6\sqrt{3}$ **ד.** $54 + 18\sqrt{3}$ סמ"ר

56 **א.** $k\sqrt{7}$ **ב.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}k^2$; $k = 2$ **ג.** $AD = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ **ד.** $BD = \frac{4\sqrt{7}}{5}$, $DC = \frac{6\sqrt{7}}{5}$

57 **א.** $34 - 30\cos B = 89 - 80\cos D$; $\cos D = -\cos B$ **ב.** $120°$, $AC = 7$ **ג.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ **ד.** $\frac{55\sqrt{3}}{4}$

58 **א.** $90° - \frac{\alpha}{2}$, $45° - \frac{\alpha}{4}$, $45° + \frac{3\alpha}{4}$ **ג.** $BD = 10$: גם BDC ($72°, 72°, 36°$) וגם ABD שווי־שוקיים **ד.** $AC \approx 16.18$; ≈ 1.618 — יחס הזהב

59 **ב.** כ־651 מ'

60 **א.** $AC \approx 10.43$, $\sphericalangle C \approx 66.67°$; או $AC \approx 4.89$, $\sphericalangle C \approx 113.33°$ **ב.** משולש אחד: $BC = 10\sin 40° \approx 6.43$ או $BC \geq 10$; אין: $BC < 6.43$

61 **א.** $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ וגם $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$ **ב.** גובה 12, שטח 84 סמ"ר, $R = \frac{65}{8}$ ס"מ

62 **ב.** $S = 10\sqrt{3}$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, $r = \sqrt{3}$ **ג.** $\frac{7}{3}$

63 **א.** $a = BH + HC$ **ב.** $a = HC - BH$ ו־$\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$ **ג.** מציבים $a = 2R\sin\alpha$ וכו', ו־$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$

פרק 7 – נגזרת של פולינום

64 **א.** $2x - 3$ **ב.** 12 **ג.** 13; $c = \sqrt{\frac{13}{3}} \approx 2.08$ **ד.** שני האגפים שווים ל־$A(p + r) + B$

65 **א.** $10x(x^2 - 1)^4$ **ב.** $x^2(2x - 1)^3(14x - 3)$ **ג.** $3(3x + 1)(x - 2)^2(5x - 3)$; מקס' $(-\frac{1}{3}, 0)$, מינ' ב־$x = \frac{3}{5}$ ($h \approx -21.51$); ב־$x = 2$ אין קיצון

66 **א.** $y = 9x - 23$ **ב.** $(-3, -50)$ **ג.** $y = -3x + 5$; המינימום של $f'(x) = 3x^2 - 6x$ **ד.** רק $y = 0$, המשיק בנקודה $(2, 0)$

67 **א.** $x = a$ (משיק), $x = -2a$ **ב.** מקס' $(a, 0)$, מינ' $(-a, 4a^3)$ **ג.** $a = 1$ **ד.** $x = -a \Rightarrow y = 4a^3 = -4x^3$

68 **א.** עולה: $x > 3$; יורדת: $x < 3$ **ב.** מינ' ב־$x = 3$; ב־$x = -1$ משיק אופקי בלי קיצון **ג.** $x = \frac{5}{3}$ **ד.** שני פתרונות; $k = -5$

69 **ב.** $a = -16$, $b = 24$ **ג.** מינ' $(0, 0)$ בלבד; $f = x^2(3x^2 - 16x + 24)$ והגורם השני חיובי תמיד

70 **א.** מקס' $(1, k + 4)$, מינ' $(3, k)$ **ב.** 3: $-4 < k < 0$; 2: $k = 0$ או $k = -4$; 1: $k < -4$ או $k > 0$ **ג.** $x = 1, 4$; $x = 0, 3$ — בשני המקרים הגרף משיק לציר ה־x באחד הפתרונות

71 **א.** $(2, 2)$, $(-2, -2)$ **ב.** $y = 9x - 16$, $y = 9x + 16$ **ג.** f אי־זוגית **ד.** f' זוגית

© אור בן שטרית · אינסוף

72 **א.** לא נכון (x^3) **ב.** לא נכון (x^3) **ג.** נכון **ד.** נכון **ה.** לא נכון (x^3+x) **ו.** נכון

73 $y=0$ ו־ $y=4x-4$

74 **ב.** מינ' $(0,k)$, $(2,k)$; מקס' $(1,k+1)$ **ג.** 3: $k=-1$; 4: $-1<k<0$; 2: $k=0$ או $k<-1$; 1: אין: $k>0$

פרק 8 – פונקציית שורש

75 **א.** $x\le 2$ או $x\ge 3$; $-2\le x<4$ **ב.** p: $x\le 1$ או q: $x\ge 4$; $x\ge 4$ — לא אותה פונקציה **ג.** $a=-2$, $b=2$ **ד.** $c\ge 1$

76 **א.** $y=\frac{1}{4}x+1$ **ב.** $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

77 **א.** $x\le 4$; $(0,0)$, $(4,0)$ **ג.** מקס' $(\frac{8}{3},\frac{16\sqrt{3}}{9})$; מינ' קצה $(4,0)$; עולה $x<\frac{8}{3}$, יורדת $\frac{8}{3}<x<4$ **ד.** $y=2x$ **ה.** $0\le k<\frac{16\sqrt{3}}{9}$

78 **א.** כל x **ג.** $a=12$; $(0,-4\sqrt{3})$ **ד.** הערך הגדול ביותר של f שלילי

79 **א.** $x^2-8x+20.25$ **ב.** $P(4,2)$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$ **ג.** שיפועים $\frac{1}{4}$ ו־-4; הקטע הקצר ביותר תמיד מאונך למשיק

80 **א.** $0\le x\le 4$; מקס' $(2,2)$; מינ' קצה $(0,0)$, $(4,0)$ **ב.** $(x-2)^2+y^2=4$, $y\ge 0$ **ג.** $x=0,\ 4,\ 2\pm\sqrt{3}$; $g>f$: $0<x<2-\sqrt{3}$ או $2+\sqrt{3}<x<4$ **ד.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

81 **א.** $8\sqrt{2}$, ב־$x=3$ **ב.** AB' כאשר $B'(8,-5)$

82 **א.** $0\le x\le a$; מקס' ב־$x=\frac{a}{2}$ **ב.** $\sqrt{2a}$ ו־$\sqrt{a}$ **ג.** $8<a\le 16$ (בקצוות)

פרק 9 – פונקציה רציונלית

83 **א.** $x\ne -1,2$; $x=-1$, $y=2$; חור $(2,\frac{8}{3})$ **ב.** $x\ne 2$; $x=2$, $y=1$; חותך ב־$(\frac{3}{4},1)$ **ג.** $h(x)=x$ עם חורים $(\pm 1,\pm 1)$ **ד.** כל x; $y=0$

84 **א.** $c=2$, $a=3$, $b=9$ **ב.** חור $(-2,\frac{1}{2})$; $(-1,0)$, $(0,-\frac{3}{4})$

85 **א.** $x\ne 2$; $x=2$; $(\pm\sqrt{3},0)$, $(0,\frac{3}{2})$ **ב.** מקס' $(1,2)$, מינ' $(3,6)$ **ג.** הם בשני ענפים שונים של הגרף

86 **א.** $x\ne\pm 1$; $x=\pm 1$ **ב.** מקס' $(0,0)$, מינ' $(\pm\sqrt{2},4)$ **ד.** 0: $k<0$; 2: $k=0$; 1: $0<k<4$; 0: $k=4$; 2: $k>4$; 4

87 **א.** מקס' $(0,2)$; $y=0$ **ב.** $y=-\frac{1}{2}x+2$ **ג.** $y=\frac{1}{2}x+2$ **ד.** 8

88 **א.** $x\ne -1,3$; $x=-1$, $x=3$, $y=0$ **ב.** מקס' $(1,-\frac{1}{4})$ **ד.** 4: $1,\ 1\pm\sqrt{5},\ 1\pm\sqrt{3}$

89 **א.** $a>4$ **ב.** $a>1$ **ד.** מקס' $(3,4)$, מינ' $(-3,\frac{2}{5})$; $y=1$, חותך ב־$(0,1)$ **ה.** 0: $k<\frac{2}{5}$ או $k>4$; 1: $k=\frac{2}{5},\ 1,\ 4$; 2: אחרת

90 **א.** הדיסקרימיננטה $4b^2+4a^2>0$ **ג.** $a=4$, $b=-3$; מינ' $(-\frac{1}{2},-4)$ **ד.** $-4\le f(x)\le 1$

91 **א.** $b=-6$, $c=5$; $f(x)=\frac{x-5}{x-3}$, $x\ne 1$ **ב.** $x=3$, $y=1$; $f(x)=1-\frac{2}{x-3}\ne 1$ **ג.** $y=2x-1$, $y=2x-9$

פרק 10 – בעיות קיצון

92 **א.** $GF=18-1.5x$ **ב.** 6×9, 54 סמ"ר **ג.** $S(x)=a\left(1-\frac{x}{h}\right)x$, מקסימום $\frac{ah}{4}$

93 **א.** $y=-2tx+t^2+4$; $A(\frac{t^2+4}{2t},0)$, $B(0,t^2+4)$ **ג.** $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $S=\frac{32\sqrt{3}}{9}\approx 6.16$

94 **א.** $2\sqrt{3}\times 6$ **ב.** 2×8 **ג.** לא

95 **ב.** 40 יחידות, 40 ש"ח, 500 ש"ח **ד.** $t=40-10\sqrt{6}\approx 15.51$ ש"ח

96 **א.** $5\sqrt{9+x^2}+4(8-x)$ **ב.** $x=4$, 41 מיליון ש"ח **ג.** 47 ו־$5\sqrt{73}\approx 42.72$ (מיליון ש"ח)

97 **א.** $0<h<12$ **ב.** $h=9$, $27\sqrt{3}$ סמ"ר **ג.** $6\sqrt{3}$ כל צלע — שווה־צלעות

98 **א.** $A(2+\frac{8}{k},0)$, $B(0,8+2k)$ **ב.** $y=-4x+16$, שטח 32 **ג.** $y=-2x+12$, סכום 18 **ד.** $A(4,0)$, $B(0,16)$

© אור בן שטרית · אינסוף

99 **א.** $h=\frac{P-2r-\pi r}{2}$, $S=Pr-2r^2-\frac{\pi r^2}{2}$
ב. $r=\frac{P}{4+\pi}$

100 **א.** $V=x(12-2x)^2$, $0<x<6$ **ב.** $x=2$;
128 סמ"ק

פרק 11 – בוחן מסכם

ש1 **א.** $x=2$ **ב.** $1\le x<3$ או $x\ge 4$ **ג.** 6 פתרונות
(ערכי הקיצון של f הם $\pm 0.385\approx \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$)

ש2 **א.** $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ **ב.** $m_{CA}=1$,
$m_{CB}=-1$ **ג.** שטח 7, מרחק 1.4
ד. $D(-2,-2)$

ש3 **ב.** $BD=3$, $DC=4$ **ג.** $AD=6$, $DE=2$

ש4 **א.** $6\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ **ב.** $6\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$
ג. שניהם $2\sqrt{3}$ — שווים

ש5 **א.** $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$; אי־זוגית **ב.** $(0,0)$,
$(\pm 2\sqrt{3},0)$; מקס' $(\sqrt{6},6)$, מינ' $(-\sqrt{6},-6)$;
מקס' קצה $(-2\sqrt{3},0)$, מינ' קצה $(2\sqrt{3},0)$
ד. $y=2\sqrt{3}\,x$ **ה.** $k=0$

ש6 **ב.** 20 מ' (מאונכות) ו־15 מ' (מקבילה),
1200 ש"ח **ג.** 1230 ש"ח ($x=25$): C עולה
עבור $x>20$

© אור בן שטרית · אינסוף

נספח

דף הנוסחאות – 5 יחידות לימוד

בעמודים הבאים מצורף **הנוסחאון הרשמי של משרד החינוך** במתמטיקה ברמת 5 יחידות לימוד, כפי שהוא מחולק בבחינות הבגרות (שאלונים 035571 ו־035572).

בכיתה י' השתמשתם בעיקר בחלקים: **אלגברה**, **טריגונומטריה וגאומטריה** (משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ושטח משולש), **נגזרות** ו**גאומטריה אנליטית** (ישר ומעגל). שאר הנושאים בדף — סדרות, לוגריתמים, אינטגרלים, וקטורים ועוד — מחכים לכם בכיתות י"א וי"ב.

טיפ

פתרו את הבוחן המסכם (פרק 11) עם הדף הזה ביד — בדיוק כמו בבגרות. כך תלמדו מה כתוב בו, ומה צריך לזכור בעל־פה.

© אור בן שטרית · אינספך

נוסחאון מתמטיקה

5 יחידות לימוד

אלגברה

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

משוואה ריבועית: $(a \neq 0)\ ax^2 + bx + c = 0$ השורשים: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
איבר n־י:	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום:	$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \dfrac{n\,[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \qquad q \neq 1$ סכום סדרה אין־סופית שסכומה מתכנס: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

חזקות: $(b \neq 0\ ,\ a \neq 0)$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ ,\ a > 0$	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

לוגריתמים (לפי אילוצי תחום ההגדרה):

$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a(a^b) = b$
$\log_c x = \dfrac{\log_a x}{\log_a c}$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

גדילה ודעיכה: הכמות לאחר t יחידות זמן: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ כאשר q מקדם הגדילה / הדעיכה

הסתברות

הסתברות מותנית: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת ברנולי – ההסתברות ל־ k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

טריגונומטרייה וגאומטרייה

זהויות:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\quad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש)

משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$ (γ היא הזווית הכלואה בין הצלעות a ו- b)

שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין הצלעות b ו- c)

$S = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\beta+\gamma)}$ (β ו- γ זוויות ליד הצלע a)

שטח עיגול: $S = \pi \cdot R^2$ $\quad$ **היקף מעגל:** $P = 2\pi \cdot R$ (R – רדיוס)

אורך קשת של α רדיאנים: $\ell = \alpha \cdot R$ $\quad$ **שטח גִזרה** של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2$ (R – רדיוס)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t ממשי)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
	$(\ell og_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ell na}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ell na$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקצייה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$

$u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית) ו-

אינטגרלים:

$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1$ ממשי, $t)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell n a} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ell n \lvert x \rvert + C$

אם $F(x)$ היא פונקצייה קדומה של הפונקצייה $f(x)$ אז: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + C \quad (m \neq 0)$

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

גאומטרייה אנליטית

קו ישר:

השיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־ (x_2, y_2): $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$

משוואת ישר ששיפועו m, העובר בנקודה (x_1, y_1): $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$: $\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell}\right)$

שני ישרים, בעלי שיפועים m_1, m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־ $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

המרחק d בין הנקודה (x_0, y_0) ובין הישר $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

המרחק d בין הישרים המקבילים $Ax + By + C_1 = 0$ ו־ $Ax + By + C_2 = 0$: $d = \frac{\lvert C_1 - C_2 \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

מעגל:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה (x_0, y_0) על המעגל: $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

פרבולה:

משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_0, y_0) על הפרבולה: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

מדריך של פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$: $x = -\frac{p}{2}$

מוקד של פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

	משוואה	מרחק המוקד מהראשית	
אליפסה	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
היפרבולה	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	משוואות האסימפטוטות של היפרבולה: $y = \pm \frac{b}{a} x$

מספרים מרוכבים

מכפלה בהצגה קוטבית של המספרים המרוכבים $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ו־ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, ..., n-1$

גופים במרחב

מנסרה וגליל: נפח: $V = S \cdot h$ (S – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{S \cdot h}{3}$ (S – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

חרוט ישר: שטח מעטפת: $M = \pi R\ell$ (R – רדיוס העיגול, ℓ – הקו היוצר)

כדור: נפח: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R – רדיוס הכדור)

שטח הפנים: $M = 4\pi R^2$ (R – רדיוס הכדור)

וקטורים

אורך של וקטור $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ו־ $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

המכפלה הסקלרית כאשר α היא הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

המרחק של נקודה $P(x_1, y_1, z_1)$ ממישור $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

המרחק בין מישורים מקבילים $ax + by + cz + d_1 = 0$ ו־ $ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

הזווית β בין הישר $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$ למישור $ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\underline{n} = (a, b, c)$:

$$\sin\beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

הזווית α בין המישורים $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ כאשר } \underline{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ כאשר } \underline{n_2} = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\underline{n_1} \cdot \underline{n_2}|}{|\underline{n_1}| \cdot |\underline{n_2}|}$$