

אינסוף

מתמטיקה

עבודת קיץ

במתמטיקה

למסיימי כיתה י' • קיץ תשפ"ז – 2027



עולים לכיתה י"א

4 יח"ל

מה מחכה לכם בחוברת?

משוואות ואי-שוויונות

פונקציות וטרנספורמציות

גאומטריה אנליטית

קווים מיוחדים ודמיון

טריגונומטריה

נגזרת של פולינום

פונקציית שורש

בעיות קיצון

סטטיסטיקה

הסתברות

בוחן מסכם

11 פרקים | 78 תרגילים ובוחן מסכם | תוכנית קיץ ל-8 שבועות | תשובות סופיות ודף נוסחאות

שם התלמיד/ה:

כיתה:

בי"ס:



© 2026 אור בן שטרית • אינסוף. כל הזכויות שמורות.

אינסוף תרגילים. חינם.

מותר להדפיס ולהפיץ את החוברת בשלמותה ובחינם לצורכי לימוד. אין להעתיק ממנה תרגילים לחומרים אחרים, לשנות אותה או להשתמש בה למטרות מסחריות ללא אישור בכתב. החוברת נכתבה בידי אינסוף ואינה פרסום רשמי של משרד החינוך או של גוף אחר.

שלום לבוגרות ולבוגרי כיתה י' ב-4 יח"ל!

סיימתם שנה עם הרבה חומר חדש: גאומטריה אנליטית, דמיון, טריגונומטריה, נגזרות, פונקציית שורש, סטטיסטיקה והסתברות. הנושאים האלה הם הבסיס של שאלון הבגרות 035471 – סטטיסטיקה והסתברות, גאומטריה משולבת וחשבון דיפרנציאלי – ובכיתה י"א ממשיכים לבנות עליהם. החוברת הזו נועדה לשמור על הכושר המתמטי שלכם בחופש ולחזק את מה שהכי חשוב לקראת י"א: **הבנה, דרך מסודרת ושליטה טכנית.**

החוברת בנויה לפי **המלצות ההוראה של משרד החינוך לכיתה י', 4 יח"ל, לשנת תשפ"ז**. בכל פרק התרגילים מסודרים **מהקל אל הקשה**: מתחילים בתרגילי חזרה, ממשיכים בשאלות ברמת בגרות, ומסיימים בתרגילי אתגר. בסוף החוברת יש **תשובות סופיות** לכל התרגילים, ו**דף הנוסחאות** של 4 יח"ל – אותו דף שתקבלו בבחינת הבגרות.

איך עובדים עם החוברת?

- 1 פותרים במחברת, עם כל השלבים.** בבגרות נבדקת הדרך, לא רק התשובה. כתבו כל מעבר וכל הצבה בנוסחה.
- 2 קודם תזכורת, אחר כך תרגול.** קראו את התזכורת שבפתח הפרק, כסו אותה ונסו לשחזר אותה בעל-פה.
- 3 סרטוט עוזר לחשוב.** בגאומטריה – סרטוט גדול עם כל הנתונים. בפונקציות – סקיצה שמתאימה לתוצאות.
- 4 בודקים מיד.** אחרי כל תרגיל השוו את התשובה שלכם לתשובות שבסוף החוברת. טעיתם? מצאו את הטעות לפני שממשיכים – זה החלק החשוב ביותר בלמידה.
- 5 נתקעתם? סמנו את התרגיל, המשיכו הלאה וחזרו אליו אחרי יום-יומיים.** תרגילי האתגר נועדו לאתגר – לא לייאש.

טיפים ללמידה נכונה – מה באמת עובד

מסבירים בקול

אם אתם מצליחים להסביר פתרון לחבר במילים שלכם – סימן שהבנתם אותו באמת.

שליפה מהזיכרון

נסו לפתור לפני שאתם מציצים בתזכורת או בתשובה. המאמץ להיזכר הוא מה שמקבע את החומר.

מחשבון בחוכמה

מחשבון לחישובים, לא במקום הבנה. בטריגונומטריה בדקו שהמחשבון במצב מעלות (DEG).

מחברת טעויות

לכל טעות רשמו: במה טעיתי, למה, ומה הדרך הנכונה. בסוף החוברת יש טבלה מוכנה לזה.

שינה ומנוחה

הזיכרון מתקבע בזמן השינה. שנת לילה טובה לפני יום למידה שווה יותר מעוד שעת תרגול בעייפות.

מערבבים נושאים

פעם בשבוע פתרו תרגיל אחד מפרק קודם. כך לומדים לזהות איזה כלי מתאים לכל שאלה.

בהצלחה ותיהנו מהחופש!
צוות אינסוף

סימנים בחוברת: ★ אתגר תרגיל קשה במיוחד

הוכחה שאלת הוכחה

חשיבה שאלה מושגית – מנמקים, לא רק מחשבים

אוריינות שאלה מהחיים

תוכנית הקיץ שלי

שמונה שבועות, שלוש פעמים בשבוע, כ-45 דקות בכל פעם. יוצאים לטיול? אין בעיה – הזיזו שבוע, העיקר להמשיך.

שבוע	מה עושים	סיימתי	כמה אני בטוח/ה?
1	פרק 1 – משוואות ואי-שוויונות + פרק 2 – פונקציות וטרנספורמציות	☐	○○○
2	פרק 3 – גאומטריה אנליטית	☐	○○○
3	פרק 4 – קווים מיוחדים במשולש ודמיון	☐	○○○
4	פרק 5 – טריגונומטריה	☐	○○○
5	פרק 6 – נגזרת של פולינום	☐	○○○
6	פרק 7 – פונקציית שורש + פרק 8 – בעיות קיצון	☐	○○○
7	פרק 9 – סטטיסטיקה + פרק 10 – הסתברות	☐	○○○
8	פרק 11 – בוחן מסכם + חזרה על מחברת הטעויות	☐	○○○

מד ההתקדמות

צבעו משבצת לכל פרק שסיימתם:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

סיימתי את כל החוברת בתאריך:

ההתחייבות שלי

הימים שבהם אלמד:

☐ א
 ☐ ב
 ☐ ג
 ☐ ד
 ☐ ה
 ☐ ו

השעה הקבועה שלי: _____

המטרה שלי לכיתה י"א: _____

איך משתמשים במד הביטחון?

בסוף כל שבוע צבעו עיגול אחד, שניים או שלושה: **עיגול אחד** – "עוד לא, אני צריך/ה חזרה"; **שניים** – "כמעט, יש לי עוד שאלות"; **שלושה** – "בטוח/ה, אני יכול/ה להסביר לחבר". בשבוע האחרון חזרו קודם לנושאים שקיבלו עיגול אחד בלבד.

טיפ של מורים ותיקים

בתי ספר רבים פותחים את כיתה י"א במבחן על חומר כיתה י'. פרק 11 בנוי כמו מבחן כזה, בסגנון שאלון הברות: פתרו אותו בתנאי מבחן – שעתיים, מחשבון רגיל (לא גרפי), דף הנוסחאות שבסוף החוברת, ובלי להציץ בתשובות.

תזכורת קצרה

פירוק לגורמים	הוצאת גורם משותף · נוסחאות הכפל המקוצר · טרינום: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
שברים	תחום הצבה קודם (מכנה $\neq 0$). כופלים במכנה המשותף, ובסוף בודקים את הפתרונות מול התחום.
שורשים	מעלים בריבוע ובודקים כל פתרון בהצבה – העלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרון זר, שאינו מקיים את המשוואה המקורית.
משוואה דיריבועית	$ax^2 + bx + c = 0$: מציבים $t = x^2$ (זכרו: $t \geq 0$).
אי־שוויון ריבועי	מוצאים את השורשים ומסרטטים את הפרבולה: היכן היא מעל ציר ה־ x והיכן מתחתיו?

1 פשטו ורשמו את תחום ההצבה.

א. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$ ב. $\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$ ג. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

2 פתרו. בכל סעיף רשמו קודם את תחום ההצבה.

א. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$ ב. $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = 1$ ג. $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x-5}{x-3}$

חשיבה בסעיף ב התקבל "פתרון" אחד. האם הוא באמת פתרון? מה המסקנה?

3 פתרו.

א. $\sqrt{x+6} = x$ ב. $\sqrt{2x-1} = x-2$ ג. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ד. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

4 פתרו.

א. $x^2 - 5x + 6 < 0$ ב. $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$
ג. $x^2 + 4 > 4x$ ד. $(x-1)(x+3) \leq x-1$

חשיבה בסעיף ד משהו "חילק את שני האגפים ב־ $(x-1)$ " וקיבל $x+3 \leq 1$. מה הבעיה בדרך הזו?

5 א. פתרו את מערכת המשוואות: $y = x^2 - 2x - 3$, $y = x + 1$. מה המשמעות הגרפית של הפתרונות?

ב. פתרו את מערכת המשוואות: $x + y = 6$, $xy = 8$.

ג. עבור אילו ערכים של k הישר $y = 2x + k$ חותך את הפרבולה $y = x^2$ בשתי נקודות? בנקודה אחת? ועבור אילו ערכים אין להם נקודות משותפות?

- 6** **אוריינות** גינה מלבנית שממדיה 12×8 מטרים מוקפת בשביל ברוחב אחיד. השטח הכולל של הגינה והשביל יחד הוא 192 מ"ר.
- א. נסמן ב- x את רוחב השביל. הראו כי $(12 + 2x)(8 + 2x) = 192$.
- ב. מצאו את רוחב השביל. מדוע אחד הפתרונות של המשוואה נפסל?
- ג. מה שטח השביל לבדו?

תרגילים קשים במיוחד – לשאפתנים

★ מקבץ אתגר

- 7** **אתגר** א. פתרו את המשוואה $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$. (רמז: העבירו את אחד השורשים לאגף השני לפני שמעלים בריבוע).
- ב. **חשיבה** הסבירו, בלי לפתור, מדוע למשוואה $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 2$ אין פתרון.
- 8** **אתגר** א. פרקו לגורמים את הביטוי $x^4 - 5x^2 + 4$. (רמז: הציבו $t = x^2$).
- ב. פתרו את אי-השוויון $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.
- ג. פתרו, בלי חישוב נוסף, את אי-השוויון $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.
- 9** **אתגר** **אוריינות** רוכב אופניים עבר דרך של 60 ק"מ במהירות קבועה. אילו הייתה מהירותו גדולה יותר ב-5 קמ"ש, היה מגיע ליעדו שעה אחת מוקדם יותר.
- א. נסמן ב- v את מהירות הרוכב (בקמ"ש). הסבירו מדוע $\frac{60}{v} - \frac{60}{v+5} = 1$.
- ב. מצאו את מהירות הרוכב ואת זמן הרכיבה.
- ג. **חשיבה** בדרך חזרה (אותם 60 ק"מ) רכב במהירות של 20 קמ"ש. מה הייתה המהירות הממוצעת שלו בכל הדרך, הלך ושוב? האם היא שווה לממוצע של שתי המהירויות?

הסיכום שלי לפרק

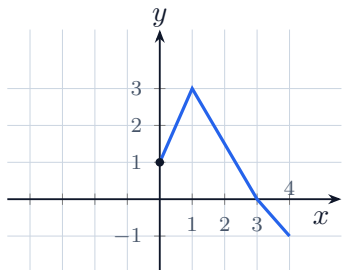
במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

תזכורת קצרה

תכונות של פונקציה	נקודות חיתוך עם הצירים · תחומי חיוביות ושליליות · תחומי עלייה וירידה · נקודות קיצון
זוגיות / אי-זוגיות	$f(-x) = f(x)$: הגרף סימטרי ביחס לציר ה- y . $f(-x) = -f(x)$: הגרף סימטרי ביחס לראשית הצירים.
הזזות ומתיחות	$f(x) + k$ – הזזה למעלה/למטה; $f(x - p)$ – ימינה ב- p ; $a \cdot f(x)$ – מתיחה אנכית; $-f(x)$ – שיקוף בציר ה- x ; $f(-x)$ – שיקוף בציר ה- y .
ערך מוחלט	$ f(x) $: כל מה שמתחת לציר ה- x משתקף כלפי מעלה.

10 נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ו- $g(x) = x - 1$.

- מצאו את קודקוד הפרבולה ואת נקודות החיתוך של f עם הצירים.
- מצאו את תחומי החיוביות והשליליות ואת תחומי העלייה והירידה של f .
- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים של f ושל g .
- סרטטו את שני הגרפים באותה מערכת צירים, ופתרו בעזרת הסרטוט את אי-השוויון $f(x) < g(x)$.



- קבעו עבור כל פונקציה אם היא זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן:
 $x|x|$, $|x| + 3$, $x^2 + x$, $x^3 + x$, $x^4 - 2x^2$, $(x - 1)^2$
- בסרטוט מתואר הגרף של הפונקציה h עבור $x \geq 0$. השלימו את הגרף עבור $x < 0$ אם ידוע ש- h זוגית.
- חשיבה** האם אפשר להשלים את הגרף כך ש- h תהיה אי-זוגית? נמקו.

- 12 סרטטו באותה מערכת צירים את $y = x^2$ ואת $y = x^3$. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- 13 פתרו: $x^3 > x^2$. היעזרו בסרטוט, ונמקו גם אלגברית.
- ג. אילו מבין הפונקציות $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ עוברות דרך הנקודה $(-1, 1)$? מה משותף להן?

13 נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.

- מצאו את קודקוד הפרבולה ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים, וסרטטו אותה.

ב. לכל אחת מהפונקציות הבאות תארו במילים כיצד מתקבל הגרף שלה מהגרף של f , ומצאו את הקודקוד שלה:

$$m(x) = 2f(x) \quad k(x) = f(x) + 4 \quad h(x) = -f(x) \quad g(x) = f(x + 2)$$

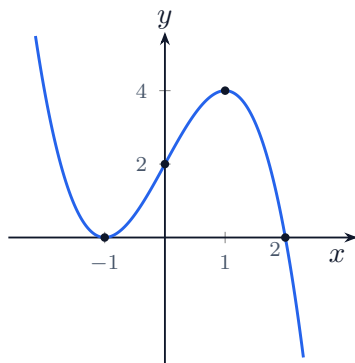
ג. לאיזו מהפונקציות שבסעיף ב יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x ? מדוע?

ד. סרטטו את $|f(x)|$, ומצאו את נקודות הקיצון שלה.

14 א. סרטטו את $y = |x - 2| - 1$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודות החיתוך עם ציר ה- x , ופתרו $|x - 2| - 1 < 0$.

ב. סרטטו את $y = |x^2 - 4x|$.

ג. **חשיבה** כמה פתרונות יש למשוואה $|x^2 - 4x| = k$ עבור $k = 2$? עבור $k = 4$? עבור $k = 5$? נמקו בעזרת הסרטוט.



15

בסרטוט מתואר הגרף של הפונקציה

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x$. הגרף משיק לציר ה- x בנקודה $(-1, 0)$, חותך אותו בנקודה $(2, 0)$, ונקודת המקסימום היא $(1, 4)$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה ואת תחומי החיוביות והשליליות.

ב. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = k$ עבור $k = 2$? $k = 4$? $k = 5$?

ג. **אתגר** נגדיר $g(x) = f(x) - 4$. בלי לחשב, כמה

נקודות חיתוך יש ל- g עם ציר ה- x ? בדקו

אלגברית: הראו כי $g(x) = -(x - 1)^2(x + 2)$.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x + 1)$ עם ציר ה- x .

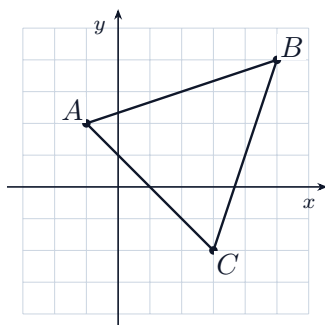
הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

תזכורת קצרה

מרחק ואמצע	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
שיפוע ומשוואת ישר	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
מקבילים ומאונכים	מקבילים: $m_1 = m_2$	מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$
שיפוע וזווית	$\tan \alpha = m $	כאשר α היא הזווית החדה בין הישר לציר ה-x.
סוג המרובע	מקבילית: האלכסונים חוצים זה את זה (אמצע משותף). מלבן: מקבילית עם זווית ישרה. מעוי: מקבילית עם צלעות סמוכות שוות.	

16



- נתונות הנקודות $A(-1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, -2)$.
- חשבו את אורכי צלעות המשולש ABC . מה סוג המשולש?
 - M היא אמצע הצלע AC . מצאו את שיעורי M , והראו כי $BM \perp AC$. מדוע זה לא מפתיע?
 - חשבו את שטח המשולש.
 - מצאו את שיעורי הנקודה D שעבורה המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. איזו מקבילית התקבלה? נמקו.

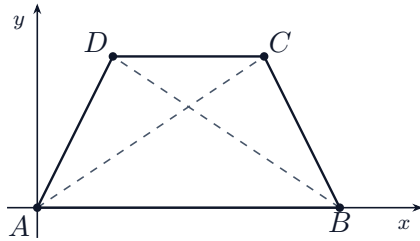
17

- נתון הישר $\ell: y = -2x + 5$ והנקודה $P(2, 3)$.
- מצאו את משוואת הישר העובר דרך P והמקביל ל- ℓ .
 - מצאו את משוואת הישר העובר דרך P והמאונך ל- ℓ , ואת נקודת החיתוך Q שלו עם ℓ .
 - חשבו את המרחק PQ . **חשיבה** מדוע זהו המרחק הקצר ביותר מ- P אל הישר ℓ ?
 - חשבו את שטח המשולש שיוצרים הישר ℓ , הישר מסעיף ב וציר ה-y.

18

- נתונות הנקודות $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(4, 5)$, $D(0, 3)$.
- הוכיחו שהמרובע $ABCD$ הוא מקבילית – בעזרת שיפועים.
 - הוכיחו שהמקבילית היא מלבן בשתי דרכים: בעזרת שיפועים ובעזרת אורכי האלכסונים.
 - חשבו את שטח המלבן ומצאו את נקודת המפגש של האלכסונים.

19



נתונות הנקודות $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(6, 4)$, $D(2, 4)$.

א. הוכיחו כי $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים.

ב. E ו- F הם אמצעי השוקיים AD ו- BC . חשבו את אורך EF , ובדקו שהוא שווה למחצית סכום הבסיסים.

ג. חשבו את שטח הטרפז.

ד. מצאו את נקודת המפגש O של האלכסונים, ואת היחס $AO : OC$. הסבירו את התוצאה בעזרת דמיון משולשים.

20

נתונים הישרים $y = -x + 4$ ו- $y = \sqrt{3}x + 1$.

א. חשבו את הזווית החדה שכל יוצר עם ציר ה- x .

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ג. שני הישרים וציר ה- x יוצרים משולש. חשבו את זווית המשולש. (רמז: סרטוט!)

21

נתון משולש שקודקדיו $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$.

א. מצאו את משוואות התיכונים היוצאים מהקודקדים A ו- B , ואת נקודת החיתוך שלהם G .

ב. בדקו שגם התיכון השלישי עובר דרך G .

ג. D היא אמצע BC . הראו כי $AG = 2 \cdot GD$.

22

אוריינות **אתגר** ★ לפארק שצורתו משולש יש שלושה שערים, בנקודות $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ ו- $C(0, 8)$ (כל יחידה במערכת הצירים מייצגת 10 מטרים). רוצים להציב מזרקה במרחקים שווים משלושת השערים.

א. על איזה ישר נמצאות כל הנקודות שמרחקן מ- A שווה למרחקן מ- B ? מצאו את משוואתו.

ב. מצאו את מיקום המזרקה ואת המרחק ממנה לכל שער.

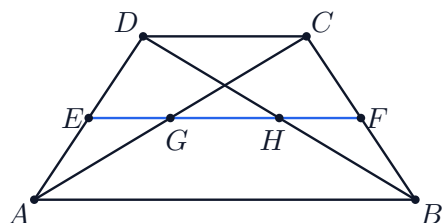
ג. **חשיבה** המזרקה נמצאת בדיוק על אחת מצלעות הפארק. על איזו צלע, ומדוע? (רמז: מה סוג המשולש?)

הסיכום שלי לפרק

במילים שלכם: כלל אחד לזכור, טעות אחת שעשיתם ותרגיל אחד שכדאי לחזור אליו.

תזכורת קצרה

קטע אמצעים	במשולש: מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. בטרפז: מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
תיכונים	נחתכים בנקודה אחת, המחלקת כל תיכון ביחס 2 : 1 מהקודקוד. תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווים-שטח.
חוצה זווית ואנך אמצעי	חוצה זווית: המקום הגאומטרי של הנקודות שמרחקן משוקי הזווית שווה. חוצה זווית במשולש: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. אנך אמצעי: המקום הגאומטרי של הנקודות שמרחקן מקצות הקטע שווה.
דמיון	ז.ז · ז.ז.צ · צ.צ.צ. יחס הדמיון k = יחס הצלעות המתאימות, הגבהים, התיכונים, חוצי הזוויות וההיקפים. יחס השטחים: k^2 .



23 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = 14$, $CD = 6$. E ו- F הם אמצעי השוקיים AD ו- BC . הקטע EF חותך את האלכסון AC בנקודה G ואת האלכסון BD בנקודה H .

א. חשבו את EF .

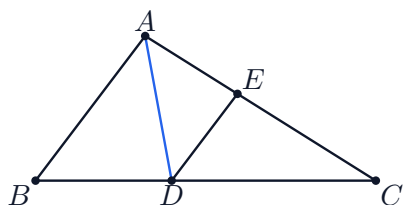
ב. הסבירו מדוע EG הוא קטע אמצעים במשולש ADC , וחשבו את EG ואת EH .

ג. חשבו את GH , והראו שבכל טרפז שבו $AB > CD$ מתקיים $GH = \frac{AB - CD}{2}$.

24 במשולש ABC אורך התיכון AD הוא 9 ס"מ, ו- G היא נקודת המפגש של התיכונים.

א. חשבו את AG ואת GD .

ב. נתון ששטח המשולש ABC הוא 36 סמ"ר. חשבו את השטחים של המשולשים ABG , ABD ו- BGD .

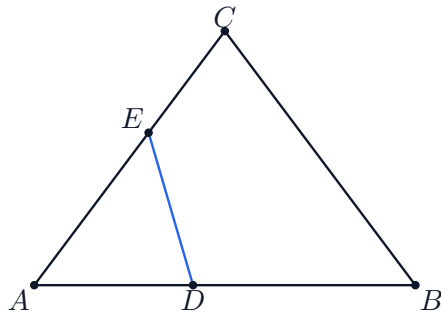


25 במשולש ABC נתון: $AB = 8$, $AC = 12$, $BC = 15$. AD חוצה את הזווית A (הנקודה D על BC). דרך D מעבירים ישר המקביל ל- AB , והוא חותך את AC בנקודה E .

א. חשבו את BD ואת DC .

ב. חשבו את DE ואת AE . (רמז: $\triangle DEC \sim \triangle BAC$).

ג. הוכחה הוכיחו שהמשולש ADE שווה-שוקיים – בלי חישוב.



26

במשולש ABC הנקודה D נמצאת על AB והנקודה E על AC . נתון: $AD = 5$, $DB = 7$, $AE = 6$, $EC = 4$, $BC = 10$.

א. הוכיחו כי $\triangle ADE \sim \triangle ACB$. (שימו לב לסדר הקודקודים!)

ב. חשבו את DE .

ג. הראו שהמשולש ABC שווה-שוקיים, וחשבו את שטחו. חשבו את שטח המשולש ADE ואת שטח המרובע $BCED$.

ד. חשיבה האם $DE \parallel BC$? נמקו.

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) CD הוא הגובה ליתר, ונתון: $AD = 9$, $DB = 16$.

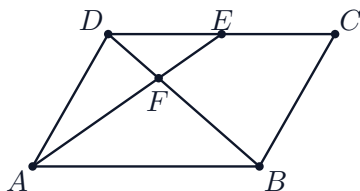
27

א. הוכיחו כי $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, והסיקו כי $CD^2 = AD \cdot DB$.

ב. חשבו את CD , AC ו- BC , ואת שטח המשולש ABC .

במשולש ABC הבסיס $BC = 12$ והגובה לבסיס הוא 8. בתוך המשולש חסום ריבוע, שאחת מצלעותיו מונחת על BC , ושני קודקודיו האחרים נמצאים על AB ועל AC . חשבו את אורך צלע הריבוע. (רמז: הצלע העליונה של הריבוע יוצרת משולש קטן הדומה ל- ABC).

28



29

אתגר ★ $ABCD$ מקבילית ששטחה 60 סמ"ר. E היא אמצע הצלע CD , והקטע AE חותך את האלכסון BD בנקודה F .

א. הוכיחו כי $\triangle DEF \sim \triangle BAF$, ומצאו את היחס $DF : FB$.

ב. חשבו את שטח המשולש AFD .

ג. חשבו את שטח המשולש DEF .

הוכחה

30

א. במשולש ABC האנכים האמצעיים לצלעות AB ו- AC נחתכים בנקודה O . הוכיחו ש- O נמצאת גם על האנך האמצעי לצלע BC .

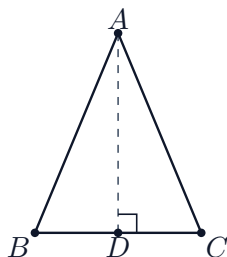
ב. חוצי הזוויות B ו- C במשולש ABC נחתכים בנקודה I . הוכיחו ש- I נמצאת במרחקים שווים משלוש הצלעות, והסיקו כי AI חוצה את הזווית A .

תזכורת קצרה

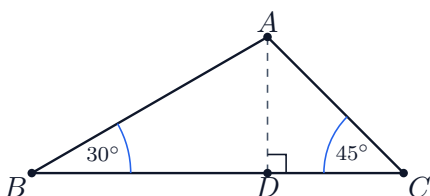
$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד } \alpha}{\text{היתר}}$	$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול } \alpha}{\text{היתר}}$	במשולש ישר-זווית
	$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול } \alpha}{\text{הניצב שליד } \alpha}$	
$\tan 45^\circ = 1, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$		ערכים מדויקים
$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (הזווית שבין a ל- b). לזווית קהה: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$		שטח משולש
מורידים גבהים ומפרקים למשולשים ישרי-זווית. מתחילים במשולש שבו יש מספיק נתונים.		צורה מורכבת

31 בתרגיל זה חשבו בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

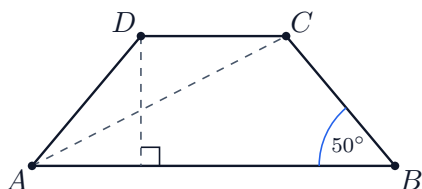
- א. במשולש ABC הזווית C ישרה, היתר $AB = 10$ ס"מ ו- $\angle A = 35^\circ$. חשבו את אורכי הניצבים ואת שטח המשולש.
- ב. אורכי הניצבים של משולש ישר-זווית הם 7 ס"מ ו-24 ס"מ. חשבו את אורך היתר ואת הזווית החדות.



- 32 במשולש ABC נתון: $AB = AC = 13$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. AD הוא הגובה לבסיס.
- א. חשבו את AD ואת שטח המשולש.
- ב. חשבו את זוויות המשולש.
- ג. חשבו את אורך הגובה מהקודקוד B לשוק AC – בשתי דרכים: בעזרת השטח, ובעזרת סינוס הזווית C .



- 33 במשולש ABC נתון: $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. AD הוא הגובה לצלע BC , ואורכו 6 ס"מ.
- א. חשבו בצורה מדויקת (עם שורשים) את BD , DC , AB ו- AC .
- ב. חשבו בצורה מדויקת את BC ואת שטח המשולש.
- ג. חשבו את הזווית A .



34

- בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ הבסיסים הם $AB = 20$ ס"מ ו- $CD = 8$ ס"מ, וזווית הבסיס $\angle B = 50^\circ$.
 א. חשבו את אורך השוק ואת גובה הטרפז.
 ב. חשבו את שטח הטרפז.
 ג. חשבו את אורך האלכסון AC , ואת הזווית שהוא יוצר עם הבסיס AB .

35

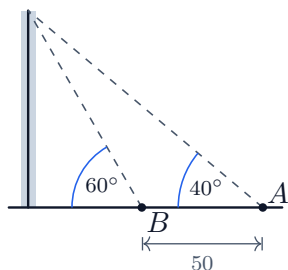
- במעוין אורך הצלע הוא 10 ס"מ, וגודל הזווית החדה הוא 70° .
 א. חשבו את אורכי האלכסונים. (רמז: האלכסונים מאונכים וחוצים את הזוויות).
 ב. חשבו את שטח המעוין בעזרת האלכסונים.
 ג. חשבו את השטח שוב, בעזרת הנוסחה $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (המעוין מורכב משני משולשים חופפים).
 ד. **חשיבה** חשבו את השטח גם בעזרת הזווית הקהה של המעוין. מדוע מתקבלת אותה תוצאה?

36

- אוריינות** סולם שאורכו 6 מטרים נשען על קיר אנכי, ויוצר עם הקרקע זווית של 70° .
 א. לאיזה גובה על הקיר מגיע הסולם?
 ב. תחתית הסולם החליקה והתרחקה מהקיר במטר אחד. מה הזווית החדשה בין הסולם לקרקע?
 ג. בכמה סנטימטרים ירד הקצה העליון של הסולם?

37

- הישר AB עובר דרך הנקודות $A(0, 3)$ ו- $B(4, 0)$. O היא ראשית הצירים.
 א. מצאו את שיפוע הישר AB ואת הזווית החדה שהוא יוצר עם ציר ה- x .
 ב. חשבו את זוויות המשולש OAB , ואת אורך הגובה מ- O לישר AB .
 ג. מצאו את הזווית בין הישר AB לבין הישר $y = 2x$. (רמז: חשבו לכל ישר את הזווית שלו עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .)



38

- אתגר** **אוריינות** מנקודה A על הקרקע רואים את ראש המגדל בזווית הגבהה של 40° . מתקדמים 50 מטרים לכיוון המגדל, לנקודה B , ומשם רואים את ראש המגדל בזווית הגבהה של 60° .
 א. נסמן ב- h את גובה המגדל וב- d את המרחק מ- B לבסיס המגדל. כתבו שתי משוואות ב- h וב- d .
 ב. חשבו את גובה המגדל (בדיוק של מטר אחד).

תזכורת קצרה

קצב שינוי	ממוצע בקטע $[a, b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (שיפוע המיתר). רגעי: $f'(x)$ (שיפוע המשיק).
כללי גזירה	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $[(u(x))^n]' = n u^{n-1} \cdot u'$ $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ $[n(ax + b)^{n-1} \cdot a]$
משיק	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ישרים מקבילים – אותו שיפוע.
חקירה	תחום $\leftarrow$ חיתוך עם הצירים $\leftarrow f'(x) = 0 \leftarrow$ טבלת סימנים של $f' \leftarrow$ עלייה וירידה $\leftarrow$ קיצון $\leftarrow$ סקיצה.

39 א. חשבו את קצב השינוי הממוצע של $f(x) = x^2$ בקטע $[1, 3]$, ואת $f'(2)$. מה גיליתם?

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף של f בנקודה שבה $x = 2$.

ג. אוריינות כדור מתגלגל במורד מדרון, והמרחק שעבר (במטרים) אחרי t שניות הוא $s(t) = 5t^2$.

מה המהירות הממוצעת שלו בין $t = 1$ ל- $t = 3$? ומה המהירות שלו ברגע $t = 2$?

40 גזרו ופרקו את הנגזרת לגורמים.

א. $4x^3 - 6x^2 + 1$ ב. $(2x - 1)^4$ ג. $x(x - 3)^2$
ד. $(x^2 + 1)^3$ ה. $(x + 1)^2(x - 2)$

41 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x = 1$.

ב. מצאו את משוואות המשיקים לגרף שמקבילים לישר $y = 9x$.

42 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

א. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים. (רמז: הוציאו גורם משותף).

ב. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה, וסרטטו סקיצה.

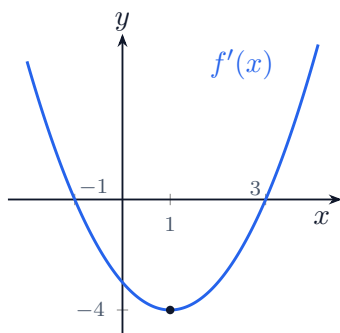
ג. חשיבה עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $f(x) = k$ שלושה פתרונות? שני פתרונות? פתרון אחד?

43 נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^2$.

א. הראו ש- f זוגית. מה המשמעות לגבי הגרף?

ב. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה, ומצאו את תחומי העלייה והירידה.



44

בסרטוט מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של פולינום $f(x)$. הגרף הוא פרבולה החותכת את ציר ה- x ב- $x = -1$ וב- $x = 3$, וקודקודה בנקודה $(1, -4)$.

- מצאו את תחומי העלייה והירידה של f .
- מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של f , וקבעו את סוגן.
- עבור איזה ערך של x שיפוע המשיק לגרף של f הוא הקטן ביותר? מהו השיפוע הזה?
- חשיבה** נתון ש- $f(0) = 0$. האם $f(1)$ חיובי או שלילי? נמקו בלי לחשב את f .

45

- לפונקציה $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ יש נקודת קיצון ב- $x = 2$.
- מצאו את a .
 - מצאו את שתי נקודות הקיצון של f וקבעו את סוגן.

46

אתגר נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 - 4)^2$.

- הראו כי $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$.
- מצאו את נקודות הקיצון ואת סוגן, וסרטטו סקיצה. מה מיוחד בנקודות החיתוך עם ציר ה- x ?
- כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = k$ עבור $k = 0$? $k = 10$? $k = 16$? $k = 20$?

תרגילים קשים במיוחד – לשאפתנים

★ **מקבץ אתגר**

47

אתגר מהנקודה $P(0, -4)$ מעבירים משיקים לגרף הפונקציה $f(x) = x^2$.

- הראו שמשוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x = a$ היא $y = 2ax - a^2$.
- מצאו את ערכי a שעבורם המשיק עובר דרך P , ורשמו את משוואות שני המשיקים.
- חשבו את שטח המשולש שקודקודיו הם P ושתי נקודות ההשקה.

48

אתגר נתונים הפונקציה $f(x) = x^3$ והישר $y = 3x - 2$.

- הראו שהישר משיק לגרף של f בנקודה $(1, 1)$.
- מצאו את הנקודה הנוספת שבה הישר חותך את הגרף.
(רמז: בדקו ש- $(x^3 - 3x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$.)
- חשיבה** "משיק הוא ישר שנוגע בגרף בנקודה אחת בלבד" – האם הטענה נכונה? נמקו בעזרת סעיף ב.

תזכורת קצרה

תחום	$\sqrt{f(x)}$ מוגדרת כאשר $f(x) \geq 0$.
נגזרת	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
	מכפלה: $(g\sqrt{f})' = g'\sqrt{f} + g \cdot \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
קיצון בקצה	אם התחום סגור מצד אחד (למשל $x \leq 4$), בודקים גם את הנקודה שבקצה – היא עשויה להיות נקודת קיצון.

49 מצאו את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

א. $\sqrt{x-3}$ ב. $\sqrt{9-x^2}$ ג. $\sqrt{x^2-4x}$ ד. $\sqrt{4-2x}+1$ ה. $(x+1)\sqrt{x}$

50 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x+1}$

- א. מצאו את תחום ההגדרה, והראו ש- f עולה בכל התחום. מהי נקודת הקיצון שלה?
 ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x=4$.
 ג. היכן חותך המשיק את ציר ה- x ?

51 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

- א. מצאו את תחום ההגדרה, והראו ש- f זוגית.
 ב. מצאו את נקודות הקיצון (כולל בקצות התחום) וסרטטו את הגרף.
 ג. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $x=1$.
 ד. **חשיבה** הראו שכל נקודה (x, y) על הגרף נמצאת במרחק 2 מראשית הצירים. (רמז: נוסחת המרחק). מהי צורת הגרף?

52 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

- א. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.
 ב. הראו כי $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.
 ג. מצאו את נקודות הקיצון (כולל בקצה התחום), ואת תחומי העלייה והירידה. סרטטו סקיצה.

53 **אתגר** נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{6-x}$

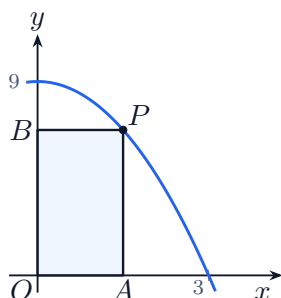
- א. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.
 ב. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן. סרטטו סקיצה.
 ג. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות בדיוק?

שיטת העבודה בבעיית קיצון

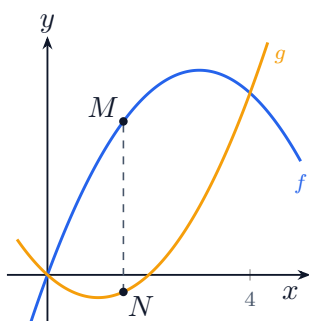
1. מסמנים משתנה אחד (x) , כותבים מה הוא מייצג ומהו התחום שלו.
2. מביעים את מה שצריך להביא למקסימום או למינימום כפונקציה של x בלבד.
3. גוזרים, משווים לאפס, ומראים בטבלת סימנים שזה אכן מקסימום או מינימום.
4. עונים בדיוק על מה שנשאל, ומציינים יחידות מידה.

54 סכומם של שני מספרים חיוביים הוא 12. מצאו את המספרים שעבורם מכפלת אחד המספרים בריבוע של המספר האחר היא הגדולה ביותר, ואת המכפלה המקסימלית.

55 **אוריינות** לחקלאי יש גדר באורך 60 מטרים. הוא רוצה לגדר חלקה מלבנית הצמודה לקיר ארוך (לאורך הקיר אין צורך בגדר). מה צריכים להיות ממדי החלקה כדי ששטחה יהיה מקסימלי? מה השטח המקסימלי?



56 הנקודה P נמצאת על הגרף של $y = 9 - x^2$ ברביע הראשון. המלבן $OAPB$ בנוי כך ש- A נמצאת על ציר ה- x , B נמצאת על ציר ה- y , ו- O היא ראשית הצירים. א. הביעו את שטח המלבן באמצעות שיעור ה- x של P . ב. מצאו את שיעורי P שעבורה שטח המלבן מקסימלי, ואת השטח המקסימלי.



57 נתונות הפונקציות $f(x) = 6x - x^2$ ו- $g(x) = x^2 - 2x$. ישר אנכי $x = t$ ($0 < t < 4$) חותך את הגרף של f בנקודה M ואת הגרף של g בנקודה N . א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים, והסבירו מדוע בתחום $0 < x < 4$ הגרף של f נמצא מעל הגרף של g . ב. הביעו את אורך הקטע MN באמצעות t . ג. מצאו את t שעבורו אורך הקטע מקסימלי, ואת האורך המקסימלי.

58 מצאו את הנקודה על הגרף של $y = \sqrt{x}$ הקרובה ביותר לנקודה $A(3, 0)$, ואת המרחק המינימלי. (רמז: הביאו למינימום את **ריבוע** המרחק – זה קל יותר ונותן אותה נקודה.)

59 **אוריינות** במטע יש 100 עצים, וכל עץ מניב 60 ק"ג פרי. מניסיון ידוע שכל עץ נוסף שנוטעים מקטין את היבול של כל עץ ב-0.5 ק"ג. כמה עצים צריכים להיות במטע בסך הכול כדי שהיבול הכולל יהיה מקסימלי? מהו היבול המקסימלי?

60

אתגר ★

השוקיים של משולש שווה-שוקיים הן באורך 10 ס"מ. נסמן ב- b את אורך הבסיס.

א. הראו ששטח המשולש הוא $S(b) = \frac{b}{2} \sqrt{100 - \frac{b^2}{4}}$, ורשמו את התחום של b .

ב. מצאו את b שעבורו השטח מקסימלי, ואת השטח המקסימלי.

ג. חשיבה מהי הזווית שבין השוקיים במשולש ששטחו מקסימלי? האם הייתם יכולים לנחש

$$זאת מהנוסחה $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin \gamma$?$$

תרגילים קשים במיוחד – לשאפתנים

★ מקבץ אתגר

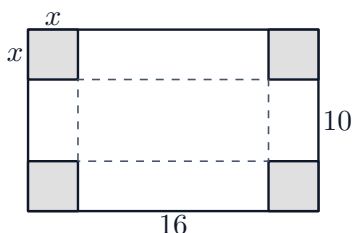
61

אתגר ★

מגיליון קרטון מלבני שממדיו 16×10 ס"מ גוזרים בכל אחת מהפינות ריבוע שצלעו x ס"מ, ומקפלים את השוליים כך שמתקבלת קופסה פתוחה.

א. הראו שנפח הקופסה הוא $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$, ורשמו את התחום של x .

ב. מצאו את x שעבורו נפח הקופסה מקסימלי, ואת הנפח המקסימלי. (שימו לב: אחד הפתרונות של $V'(x) = 0$ אינו נמצא בתחום).



62

אתגר ★

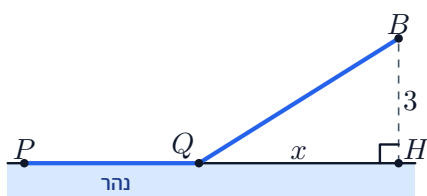
אורינות

משאבה P נמצאת על גדה ישרה של נהר, ובית B נמצא במרחק 3 ק"מ מהגדה (ראו סרטוט: $BH \perp PH$, $PH = 9$ ק"מ). מניחים צינור לאורך הגדה מ- P עד נקודה Q שבין P ל- H , ומשם בקו ישר אל הבית. ק"מ צינור לאורך הגדה עולה 4 אלף שקלים, וק"מ צינור בקטע הישר שבין Q לבית – 5 אלף שקלים.

א. נסמן $QH = x$. הראו שהעלות (באלפי שקלים) היא $C(x) = 4(9 - x) + 5\sqrt{x^2 + 9}$, $0 \leq x \leq 9$.

ב. מצאו את x שעבורו העלות מינימלית, ואת העלות המינימלית.

ג. השוו את העלות המינימלית לעלות בשתי אפשרויות אחרות: צינור ישר מ- P אל הבית, וצינור לאורך הגדה עד H ומשם אל הבית.



תזכורת קצרה

משתנים	איכותי (צבע) · כמותי בדיד (מספר אחים) · כמותי רציף (גובה)
מדדי מרכז	ממוצע: $\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \dots + x_n f_n}{N}$
מדדי פיזור	טווח: $x_{\max} - x_{\min}$ · סטיית תקן: $S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$
שינוי בנתונים	הוספת c לכל ערך: מדדי המרכז גדלים ב- c , הפיזור לא משתנה. כפל ב- $a > 0$: כל המדדים מוכפלים ב- a .

63

אלה הציונים של 10 תלמידים בבוחן (בסולם 0 עד 10):

7, 9, 4, 7, 6, 8, 7, 9, 6, 7

- מהו המשתנה? מה סוגו?
- חשבו את הממוצע, את החציון ואת השכיח.
- חשבו את הטווח ואת סטיית התקן.
- המורה החליטה להוסיף נקודה אחת לציון של כל תלמיד. מה יהיו הממוצע וסטיית התקן החדשים? נמקו בלי לחשב מחדש.
- הציונים המקוריים הוכפלו ב-10 (מעבר לסולם 0 עד 100). מה הממוצע ומה סטיית התקן?

64

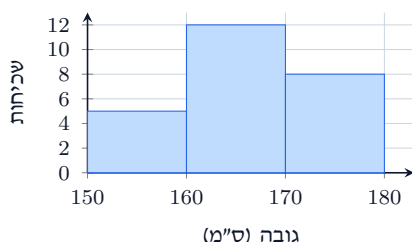
בסקר שאלו 30 תלמידים כמה אחים ואחיות יש להם:

מספר אחים	0	1	2	3	4
מספר תלמידים	4	10	12	3	1

- מצאו את השכיח ואת החציון.
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- מה אחוז התלמידים שמספר האחים והאחיות שלהם הוא 0 או 1?
- חשיבה איזה מדד מרכז מייצג בצורה הטובה ביותר את הנתונים? נמקו.

65

ההיסטוגרמה מתארת את הגבהים (בס"מ) של 25 תלמידים.



- בנו טבלת שכיחויות.
- חשבו את הגובה הממוצע בעזרת אמצעי המחלקות.
- מהי המחלקה השכיחה?
- מה אחוז התלמידים שגובהם קטן מ-170 ס"מ?

66 א. הממוצע של חמישה מספרים הוא 12. ארבעה מהם הם 8, 10, 15, ו-14. מהו המספר החמישי?

ב. לחמשת המספרים נוסף מספר שישי, והממוצע עלה ל-13. מהו המספר השישי?

ג. **חשיבה** לחמשת המספרים המקוריים מוסיפים מספר שישי, השווה בדיוק לממוצע (12). האם הממוצע ישתנה? האם סטיית התקן תשתנה? נמקו בלי לחשב.

67 **חשיבה**

א. בשתי כיתות הממוצע בבחינה היה 75. בכיתה א' סטיית התקן 5, ובכיתה ב' סטיית התקן 15. באיזו כיתה הציונים אחידים יותר? באיזו כיתה ציון 85 חריג יותר? נמקו.

ב. קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו (או תנו דוגמה נגדית):
(1) החציון הוא תמיד אחד הערכים ברשימה.

(2) אם כל הנתונים שווים זה לזה, סטיית התקן היא 0 – וגם להפך.

(3) הוספת 5 לכל הנתונים מגדילה את סטיית התקן ב-5.

(4) ייתכן שהממוצע יהיה גדול מכל הנתונים.

תרגילים קשים במיוחד – לשאפתנים

★ **מקבץ אתגר**

68 **אתגר** ★ ברשימה של חמישה מספרים שלמים הממוצע הוא 6, החציון הוא 5, השכיח היחיד הוא 4, והמספר הגדול ביותר הוא 10.

א. מצאו את חמשת המספרים. נמקו כל שלב.

ב. חשבו את סטיית התקן (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

69 **אתגר** ★ בטבלה מופיע מספר הספרים שקראו תלמידי השכבה בחופשה. ממוצע מספר הספרים הוא 2.5.

4	3	2	1	מספר ספרים
5	6	k	4	מספר תלמידים

א. מצאו את k .

ב. מצאו את החציון ואת השכיח.

ג. **חשיבה** תלמיד נוסף, שקרא בין ספר אחד ל-4 ספרים, מצטרף לשכבה. האם ייתכן שאחרי ההצטרפות הממוצע יהיה בדיוק 2.6? נמקו.

תזכורת קצרה

כללים	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
הסתברות מותנית	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	ההסתברות ל־ A כשידוע ש־ B קרה.
עץ הסתברויות		כופלים לאורך ענף, ומחברים בין ענפים. בהוצאה בלי החזרה ההסתברויות בשלב השני משתנות.
אי־תלות	$P(A/B) = P(A)$	A ו־ B בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, או באופן שקול $P(A/B) = P(A)$.

70 מטילים שתי קוביות משחק הוגנות.

- כמה תוצאות אפשריות יש במרחב המדגם?
- מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 7? שיהיה 10 לפחות?
- מה ההסתברות שתתקבל לפחות פעם אחת התוצאה 6? (רמז: מאורע משלים).
- מה ההסתברות שמכפלת התוצאות תהיה זוגית?

71 בבית ספר נשאלו 200 תלמידים אם הם עוסקים בספורט באופן קבוע:

	עוסקים בספורט	לא עוסקים בספורט	סה"כ
בנים	54	36	90
בנות	44	66	110

בוחרים תלמיד באקראי.

- מה ההסתברות שהתלמיד עוסק בספורט? שזו בת העוסקת בספורט?
- ידוע שנבחרה בת. מה ההסתברות שהיא עוסקת בספורט?
- ידוע שנבחר תלמיד שעוסק בספורט. מה ההסתברות שזו בת?
- האם המאורעות "נבחרה בת" ו"התלמיד שנבחר עוסק בספורט" תלויים? נמקו.

72 בשקית 5 כדורים אדומים ו־3 כחולים. מוציאים באקראי שני כדורים, זה אחר זה, בלי החזרה.

- סרטטו עץ הסתברויות.
- מה ההסתברות ששני הכדורים אדומים? שהם בצבעים שונים?
- מה ההסתברות שהכדור השני כחול?
- ידוע שהכדור השני כחול. מה ההסתברות שהראשון היה אדום?

- 73 אוריינות** מפעל מייצר ברגים בשתי מכונות. מכונה א' מייצרת 60% מהברגים, ומכונה ב' – 40%. במכונה א' 2% מהברגים פגומים, ובמכונה ב' – 5%.
א. בוחרים בורג באקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?
ב. ידוע שהבורג שנבחר פגום. מה ההסתברות שהוא מתוצרת מכונה א'?

- 74** A ו- B הם שני מאורעות, ונתון: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$.
א. חשבו את $P(A \cap B)$.
ב. האם A ו- B בלתי תלויים? נמקו.
ג. חשבו את $P(A/B)$ ואת $P(A/\bar{B})$. מה מלמדות התוצאות?

- 75** שחקנית כדורסל קולעת כל זריקת עונשין בהסתברות 0.8, בלי תלות בזריקות אחרות. היא זורקת 3 זריקות.
א. מה ההסתברות שתקלע את כל הזריקות?
ב. מה ההסתברות שתקלע בדיוק 2 זריקות? (רמז: באיזו זריקה יכולה להיות ההחטאה?)
ג. מה ההסתברות שתקלע לפחות זריקה אחת?

- 76 אתגר** חזרו לציונים של 10 התלמידים בתרגיל 63.
א. בוחרים תלמיד באקראי. מה ההסתברות שהציון שלו גבוה מהממוצע?
ב. בוחרים באקראי שני תלמידים שונים. מה ההסתברות ששניהם קיבלו ציון גבוה מהממוצע?
ג. מה ההסתברות שלפחות אחד מהשניים קיבל ציון גבוה מהממוצע?

תרגילים קשים במיוחד – לשאפתנים

★ מקבץ אתגר

- 77 אתגר** בקופסה א' יש 3 כדורים אדומים ו-2 כחולים, ובקופסה ב' יש כדור אדום אחד ו-4 כחולים. מוציאים באקראי כדור מקופסה א' ומעבירים אותו לקופסה ב'. אחר כך מוציאים באקראי כדור מקופסה ב'.
א. סרטטו עץ הסתברויות.
ב. מה ההסתברות שהכדור שהוצא מקופסה ב' אדום?
ג. ידוע שהכדור שהוצא מקופסה ב' אדום. מה ההסתברות שהכדור שהועבר היה אדום?
- 78 אתגר** שחקנית קולעת לסל בהסתברות 0.6 בכל זריקה, בלי תלות בין הזריקות. היא זורקת n זריקות.
א. מה ההסתברות שתחטיא את כל n הזריקות? הביעו באמצעות n .
ב. מה ההסתברות שתקלע לפחות פעם אחת ב- n זריקות?
ג. מהו המספר הקטן ביותר של זריקות שעבורו ההסתברות לקלוע לפחות פעם אחת גדולה מ-0.99? (רמז: בדקו במחשבון כמה ערכים של n .)

תנאי המבחן

זמן: שעתיים. **חומר עזר:** מחשבון רגיל (לא גרפי) ודף הנוסחאות שבסוף החוברת. **ענו על כל השאלות.**

כתבו דרך מלאה ומסודרת, כמו בבגרות. רק בסיום – השוו לתשובות הסופיות ומלאו את טבלת הציון.

ש1 (15 נקודות) 20 תלמידים נשאלו כמה שעות למדו לבחינה:

5	4	3	2	1	שעות לימוד
1	4	7	5	3	מספר תלמידים

- א. חשבו את הממוצע, את החציון ואת השכיח.
- ב. חשבו את סטיית התקן (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- ג. כל תלמיד הוסיף שעת לימוד אחת. מה הממוצע החדש ומה סטיית התקן החדשה?
- ד. בוחרים תלמיד באקראי (מהטבלה המקורית). מה ההסתברות שהוא למד יותר שעות מהממוצע?

ש2 (15 נקודות) בבית ספר 60% מהתלמידים לומדים במגמה מדעית. מבין תלמידי המגמה המדעית 70% לומדים מתמטיקה ברמה מוגברת, ומבין שאר התלמידים – 40%.

- א. בוחרים תלמיד באקראי. מה ההסתברות שהוא לומד מתמטיקה ברמה מוגברת?
- ב. ידוע שהתלמיד לומד מתמטיקה ברמה מוגברת. מה ההסתברות שהוא לומד במגמה המדעית?
- ג. האם המאורעות "לומד במגמה המדעית" ו"לומד מתמטיקה ברמה מוגברת" בלתי תלויים? נמקו.
- ד. בוחרים באקראי שני תלמידים (בית הספר גדול, ואפשר להניח אי-תלות). מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם לומד מתמטיקה ברמה מוגברת?

ש3 (20 נקודות) נתון משולש שקודקדיו $A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(4, 8)$. D ו- E הם אמצעי הצלעות AC ו- BC .

- א. מצאו את שיעורי הנקודות D ו- E , והראו כי $DE \parallel AB$ וגם $DE = \frac{1}{2}AB$.
- ב. מצאו את משוואת התיכון היוצא מהקודקוד C , ובדקו שהנקודה $G(\frac{14}{3}, \frac{8}{3})$ נמצאת עליו. מה מיוחד בנקודה G ?
- ג. חשבו את שטח המשולש ABC ואת שטח המשולש CDE . מה היחס ביניהם, ומדוע?
- ד. חשבו את הזוויות A ו- B של המשולש ABC .

- ש4 (15 נקודות)** בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = 16$, $CD = 6$, $AD = BC = 13$. האלכסונים נחתכים בנקודה O .
- חשבו את גובה הטרפז ואת זווית הבסיס A .
 - חשבו את אורך האלכסון AC .
 - מצאו את היחס $AO : OC$, וחשבו את הגובה של המשולש AOB לבסיס AB .

- ש5 (20 נקודות)** נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.
- מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.
 - מצאו את תחומי העלייה והירידה, וסרטטו סקיצה.
 - מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה הגרף חותך את ציר ה- y .
 - כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$? נמקו בעזרת ערכי הקיצון (אין צורך למצוא את הפתרונות).

- ש6 (15 נקודות)** נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$.
- מצאו את תחום ההגדרה, והראו ש- f אי-זוגית.
 - מצאו את נקודות הקיצון (כולל בקצות התחום) וקבעו את סוגן.
 - מלבן חסום בחצי המעגל $y = \sqrt{8-x^2}$, כך שאחת מצלעותיו מונחת על ציר ה- x . הראו ששטח המלבן הוא $2x\sqrt{8-x^2}$ (כאשר $x > 0$ הוא שיעור ה- x של הקודקודים הימניים), ומצאו את השטח המקסימלי בעזרת סעיף ב.

טבלת ציון – איפה אני עומד/ת?

שאלה	נושא	ניקוד	הציון שלי	קיבלתי פחות מחצי? חוזרים ל-
1	סטטיסטיקה	15	פרק 9	
2	הסתברות	15	פרק 10	
3	גאומטריה משולבת	20	פרקים 3, 4	
4	טריגונומטריה ודמיון	15	פרקים 4, 5	
5	חקירת פולינום	20	פרק 6	
6	פונקציית שורש ובעיית קיצון	15	פרקים 7, 8	
סה"כ		100		

אני יודע/ת – רשימת בדיקה לפני כיתה י"א

סמנו ✓ ליד כל מיומנות שאתם שולטים בה. על מה שלא סימנתם – חזרו בשבוע האחרון.

אלגברה ופונקציות (פרקים 1 ו-2)

- ☐ מפרק/ת צורה למשולשים ישרי-זווית ומחשב/ת שטחים.
- ☐ מצמצם/ת שברים ופותר/ת משוואות עם שברים – כולל בדיקת תחום.
- ☐ מוצא/ת זווית של ישר בעזרת $\tan \alpha = |m|$.

חשבון דיפרנציאלי (פרקים 6 עד 8)

- ☐ פותר/ת משוואות עם שורש ומשוואות דו-ריבועיות.
- ☐ פותר/ת אי-שוויון ריבועי בעזרת סקיצה של פרבולה.
- ☐ מוצא/ת זווית של ישר ופרבולה ומבין/ת את המשמעות הגרפית.
- ☐ חוקר/ת פולינום ופונקציית שורש, כולל קיצון בקצה התחום.
- ☐ מזהה פונקציה זוגית ואי-זוגית; מסרטט/ת גרפים אחרי הזזות ושיקופים, ואת $|f(x)|$.
- ☐ גוזר/ת פולינום, מכפלה והרכבה (כולל שורש).
- ☐ מוצא/ת משוואת משיק בנקודה נתונה או בשיפוע נתון.
- ☐ מסיק/ת תכונות של f מתוך הגרף של f' .

גאומטריה (פרקים 3 עד 5)

- ☐ פותר/ת בעיית קיצון: משתנה, תחום, פונקציה, הוכחת סוג הקיצון.
- ☐ מחשב/ת מרחק, אמצע ושיפוע, ומוצא/ת משוואת ישר (כולל מקבילים ומאונכים).

סטטיסטיקה והסתברות (פרקים 9 ו-10)

- ☐ מחשב/ת ממוצע, חציון, שכיח, טווח וסטיית תקן – מרשימה ומטבלה.
- ☐ מזהה מקבילית, מלבן, מעוין וטרפז במערכת צירים.
- ☐ מוכיח/ת דמיון ומשתמש/ת ביחס הדמיון וביחס השטחים.
- ☐ מוצא/ת הסתברויות בעזרת טבלה דו-ממדית ועץ הסתברויות, כולל הסתברות מותנית.
- ☐ מזהה מקבילית, מלבן, מעוין וטרפז במערכת צירים.
- ☐ מוכיח/ת דמיון ומשתמש/ת ביחס הדמיון וביחס השטחים.
- ☐ מוצא/ת משוואת ישר-זווית בעזרת סינוס, קוסינוס וטנגנס.
- ☐ יודע/ת איך שינוי בנתונים משפיע על המדדים.
- ☐ מחשב/ת הסתברויות בעזרת טבלה דו-ממדית ועץ הסתברויות, כולל הסתברות מותנית.
- ☐ בודק/ת אם שני מאורעות בלתי תלויים.

כל טעות היא הזדמנות. רשמו כאן כל טעות חשובה – ובשבוע האחרון קראו את הטבלה מהתחלה.

[illegible]

אל תסתפקו ב"טעות חישוב". שאלו את עצמכם: האם שכחתי תחום? הצבתי לא נכון בנוסחה? לא בדקתי שהקיצון אכן מקסימום? לא קראתי את כל השאלה? אחרי כמה שורות תגלו שהטעויות שלכם חוזרות על עצמן – וזה בדיוק מה שצריך לתקן לפני כיתה י"א.

תשובות סופיות

בשאלות "הראו/הוכיחו" מופיע לרוב רק כיוון פתרון קצר. ערכים מקורבים – בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית, אלא אם נכתב אחרת; מעגלים רק בתוצאה הסופית, לא בשלבי הביניים.

פרק 1 – משוואות ואי-שוויונות

1 א. $\frac{x-3}{x}, x \neq 0, -3, \frac{2(x+2)}{x-2}, x \neq 2, \frac{1}{x+1}, x \neq \pm 1$

2 א. $x = -2, x = 3$ ב. אין פתרון $x = 2$ אינו בתחום ג. $x = \frac{7}{3}$

3 א. $x = 3$ ב. $x = 5$ $x = 1$ (נפסל) ג. $x = \pm 1, \pm 3$ ד. $x = \pm 1$

4 א. $2 < x < 3$ ב. $-2 \leq x \leq 4$ ג. כל $x \neq 2$ ד. $-2 \leq x \leq 1$; אסור לחלק בביטוי שסימנו לא ידוע (וב- $x = 1$ שני האגפים 0).

5 א. $(-1, 0), (4, 5)$ – נקודות החיתוך של הגרפים ב. $(2, 4), (4, 2)$ ג. שתיים: $k > -1$; אחת: $k = -1$ בנקודה $(1, 1)$; אין: $k < -1$

6 ב. 2 מ' (הפתרון -12 שלילי) ג. 96 מ"ר

7 א. $x = 4$ ב. עבור $x \geq 0$: $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{5} > 2$ ו- $\sqrt{x} \geq 0$ לכן הסכום גדול מ-2

8 א. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ ב. $-2 < x < -1$ או $1 < x < 2$ ג. $x \leq -2$ או $x \geq 2$ או $-1 \leq x \leq 1$

9 ב. 15 קמ"ש; 4 שעות ג. $\frac{120}{7} \approx 17.14$ קמ"ש – לא 17.5: במהירות האיטית רכב זמן רב יותר

פרק 2 – פונקציות וטרנספורמציות

10 א. $(3, -4), (1, 0), (5, 0), (0, 5)$ ב. חיובית: $x < 1$ או $x > 5$ שלילית: $1 < x < 5$; יורדת $x < 3$ עולה $x > 3$ ג. $(6, 5), (1, 0)$ ד. $1 < x < 6$

11 א. זוגיות: $x^4 - 2x^2$, אי-זוגיות: $x^3 + x$; $|x| + 3$ ב. $|x|$ אף אחת: $x^2 + x$, $(x-1)^2$ שיקוף בציר ה- y : דרך $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 3)$ ג. לא: אילו הייתה h אי-זוגית, היה מתקיים $h(0) = 0$, אבל $h(0) = 1$

12 א. $(0, 0), (1, 1)$ ב. $x > 1$ ג. x^2 ו- x^4 – חזקות זוגיות

13 א. $(1, -4), (-1, 0), (3, 0), (0, -3)$ ב. $g: 2$

שמאלה, $(-1, -4)$; h : שיקוף בציר ה- x , $(1, 4)$; k : 4 למעלה, $(1, 0)$; m : מתיחה פי 2, $(1, -8)$; k – הקודקוד על ציר ה- x ד. מקס' $(1, 4)$; מינ' $(-1, 0), (3, 0)$

14 א. מינ' $(2, -1), (1, 0), (3, 0)$; $1 < x < 3$ ג. $k = 2$; $k = 4$; $k = 3$; $k = 5$; 2

15 א. עולה $-1 < x < 1$; יורדת $x < -1$ או $x > 1$ חיובית $x < 2$, $x \neq -1$; שלילית $x > 2$ ב. 2, 3, 1 ג. שתיים: $x = 1$ (השקה), $x = -2$ ד. $(1, 0), (-2, 0)$

פרק 3 – גאומטריה אנליטית

16 א. $AB = BC = 2\sqrt{10}, AC = 4\sqrt{2}$ – שווה-שוקיים ב. $M(1, 0)$; $m_{BM} = 1$

$m_{AC} = -1$ התיכון לבסיס הוא גם גובה ג. 16 ד. $D(-3, -4)$; מעוין

17 א. $y = -2x + 7$ ב. $y = \frac{1}{2}x + 2$ $Q(1.2, 2.6)$ ג. $\frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89$ ד. 1.8

18 א. $m_{AD} = m_{BC} = -2, m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{2}$ ב. $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$; $AC = BD = 5$ ג. 10; $(2.5, 3)$

19 א. $AD = BC = 2\sqrt{5}, AB \parallel DC$ ב. $EF = 6 = \frac{8+4}{2}$ ג. 24 ד. $O(4, \frac{8}{3})$; 2:1, כמו $AB : DC$

20 א. $45^\circ, 60^\circ$ ב. $(1.10, 2.90)$ ג. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

21 א. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}, y = \frac{1}{2}x$ ב. $y = -4x + 12$ ג. $AG = \frac{4\sqrt{5}}{3}, GD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

22 א. $x = 3$ ב. $(3, 4)$; 50 מ' ג. על היתר BC : במשולש ישר-זווית אמצע היתר נמצא במרחקים שווים משלושת הקודקודים

פרק 4 – קווים מיוחדים ודמיון

23 א. 10 ב. $EG = 3, EH = 7$ ג. 4

24 א. 6, 3 ב. 18, 12, 6

25 א. $DE = AE = 4.8$, $DC = 9$, $BD = 6$ ב. $\angle ADE = \angle BAD = \angle DAE$ ג.

26 א. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ והזווית A משותפת ב. 5 ג. $AC = BC = 10$; $S_{ABC} = 48$ סמ"ר; 12 סמ"ר, 36 סמ"ר ד. לא: $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{12} \neq \frac{3}{5} = \frac{AE}{AC}$

27 ב. $BC = 20$, $AC = 15$, $CD = 12$, 150

28 4.8

29 א. 1 : 2 ב. 10 סמ"ר ג. 5 סמ"ר

30 א. $OA = OB$ וגם $OA = OC$, $OB = OC$ לכן I נמצאת במרחקים שווים מ- AB ומ- BC , וגם מ- AC

פרק 5 – טריגונומטריה

31 א. $AC \approx 8.19$, $BC \approx 5.74$, $S \approx 23.49$ ב. 25; 73.74° , 16.26°

32 א. 12; 60 סמ"ר ב. $\angle B = \angle C \approx 67.38^\circ$ ג. $\angle A \approx 45.24^\circ$, $\frac{120}{13} \approx 9.23$

33 א. $AB = 12$, $DC = 6$, $BD = 6\sqrt{3}$ ב. $AC = 6\sqrt{2}$, $BC = 6 + 6\sqrt{3}$ ג. $S = 18 + 18\sqrt{3}$, 105°

34 א. ≈ 9.33 , ≈ 7.15 ב. ≈ 100.11 ג. ≈ 15.72 , $\approx 27.06^\circ$

35 א. ≈ 16.38 , ≈ 11.47 ב. ≈ 93.97 ג. $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 70^\circ \approx 93.97$ ד. $\sin 110^\circ = \sin 70^\circ$

36 א. ≈ 5.64 מ' ב. $\approx 59.42^\circ$ ג. כ-47 ס"מ

37 א. 36.87° ; 90° ; 53.13° (ב- B), 2.4 ג. $\approx 79.70^\circ$ (ב- A)

38 א. $h = (d + 50) \tan 40^\circ$, $h = d \tan 60^\circ$ ב. כ-81 מ'

פרק 6 – נגזרת של פולינום

39 א. 4 ו-4 – שווים ב. $y = 4x - 4$ ג. 20 מ' לשנייה בשני המקרים

40 א. $12x(x - 1)$ ב. $8(2x - 1)^3$ ג. $3(x - 1)(x - 3)$ ד. $6x(x^2 + 1)^2$ ה. $3(x - 1)(x + 1)$

41 א. $y = -3x + 3$ ב. $y = 9x + 7$, $y = 9x - 25$

42 א. $(0, 0)$, $(3, 0)$ ב. מקס' $(1, 4)$, מינ' $(3, 0)$; עולה $x < 1$ או $x > 3$, יורדת $1 < x < 3$ ג. $0 < k < 4$; $k = 0$ או $k = 4$; $k < 0$ או $k > 4$

43 א. $f(-x) = f(x)$; הגרף סימטרי ביחס לציר ה- y ב. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$; מקס' $(0, 0)$, מינ' $(\pm 1, -1)$ ג. עולה $-1 < x < 0$ או $x > 1$; יורדת $x < -1$ או $0 < x < 1$

44 א. עולה $x < -1$ או $x > 3$; יורדת $-1 < x < 3$ ב. מקס' ב- $x = -1$, מינ' ב- $x = 3$ ג. $x = 1$ שיפוע -4 ד. שלילי – f יורדת בקטע $[0, 1]$

45 א. $a = -3$ ב. מקס' $(0, 5)$, מינ' $(2, 1)$

46 א. כלל השרשרת: $2x \cdot (x^2 - 4)$ ב. מקס' $(0, 16)$, מינ' $(\pm 2, 0)$ – הגרף משיק לציר ה- x ג. 2, 3, 4, 2

47 א. $f'(a) = 2a$, והמשיק עובר דרך (a, a^2) ב. $a = \pm 2$: $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$ ג. 16

48 א. $f(1) = 1 = 3 \cdot 1 - 2$ וגם $f'(1) = 3$ ב. $(-2, -8)$ ג. לא: משיק יכול לחתוך את הגרף בנקודה אחרת – ההשקה היא תכונה מקומית

פרק 7 – פונקציית שורש

49 א. $x \geq 3$ ב. $-3 \leq x \leq 3$ ג. $x \leq 0$ או $x \geq 4$ ד. $x \leq 2$ ה. $x \geq 0$

50 א. $x \geq -\frac{1}{2}$; $f' > 0$; מינ' קצה $(-\frac{1}{2}, 0)$ ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ ג. $(-5, 0)$

51 א. $f(-x) = f(x)$; $-2 \leq x \leq 2$ ב. מקס' $(0, 2)$; מינ' קצה $(\pm 2, 0)$ ג. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ד. $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)} = 2$ חצי מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 2

52 א. $(0, 0)$, $(1, 0)$; $x \geq 0$ ב. $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ ג. מינ' $(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$, מקס' קצה $(0, 0)$; יורדת $0 < x < \frac{1}{3}$, עולה $x > \frac{1}{3}$

- 53** א. $x \leq 6$; $(0,0)$, $(6,0)$ ב. מקסי $(4, 4\sqrt{2})$, מיני קצה $(6,0)$ ג. $0 \leq k < 4\sqrt{2}$

- 68** א. 4, 4, 5, 7, 10 ב. $\sqrt{5.2} \approx 2.28$
- 69** א. $k = 9$ ב. חציון 2, שכיח 2 ג. לא: הוא היה צריך לקרוא 5 ספרים

פרק 8 – בעיות קיצון

- 54** 4 ו-8; 256

- 55** 15×30 מ' (הצלעות המאונכות לקיר – 15 מ'); 450 מ"ר

- 56** א. $x(9 - x^2)$ ב. $P(\sqrt{3}, 6)$; $6\sqrt{3} \approx 10.39$
- 71** א. 0.49; 0.22 ב. 0.4 ג. $\frac{22}{49} \approx 0.45$ ד. תלויים: $0.4 \neq 0.49$

- 57** א. $(0,0)$, $(4,8)$; $f - g = 2x(4 - x) > 0$ ב. $8t - 2t^2$ ג. $t = 2$
- 72** א. $\frac{15}{28}$; $\frac{5}{14}$ ב. $\frac{3}{8}$ ג. $\frac{5}{7}$ ד. $\frac{3}{7}$

- 73** א. 0.032 ב. 0.375

- 58** $(2.5, \sqrt{2.5})$; $\frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$

- 59** 110 עצים; 6050 ק"ג
- 74** א. 0.2 ב. כן: $0.2 = 0.4 \cdot 0.5$ ג. שתיהן 0.4, כמו $P(A)$ – הידיעה אם B קרה אינה משנה את ההסתברות של A

- 60** א. הגובה לבסיס: $\sqrt{100 - \frac{b^2}{4}}$; $0 < b < 20$ ב. $b = 10\sqrt{2}$, 50 סמ"ר ג. 90° אז $\sin \gamma$ מקסימלי

- 75** א. 0.512 ב. 0.384 ג. 0.992

- 76** א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{1}{15}$ ג. $\frac{8}{15}$

- 77** א. $\frac{4}{15}$ ב. $\frac{3}{4}$ ג. $\frac{3}{4}$

- 78** א. 0.4^n ב. $1 - 0.4^n$ ג. 6 זריקות $(0.4^5 \approx 0.0102)$, $(0.4^6 \approx 0.0041)$

- 61** א. בסיס $(10 - 2x) \times (16 - 2x)$, גובה x ; $0 < x < 5$ ב. $x = 2$ (הפתרון $x = \frac{20}{3}$ מחוץ לתחום); 144 סמ"ק

- 62** א. $PQ = 9 - x$, $QB = \sqrt{x^2 + 9}$ ב. $x = 4$; 45 אלף שקלים ג. צינור ישר:

$5\sqrt{90} \approx 47.43$ אלף; דרך H : 51 אלף – שתיהן יקרות יותר

פרק 9 – סטטיסטיקה

- 63** א. ציון – כמותי בדיד ב. 7, 7, 7 ג. 5; $\sqrt{2} \approx 1.41$ ד. $\sqrt{2}$ ה. $\sqrt{2}$; $10\sqrt{2} \approx 14.14$

- 64** א. 2; 2 ב. ≈ 1.57 ; ≈ 0.96 ג. $\frac{14}{30} \approx 46.67\%$ ד. השכיח או החציון (2); הממוצע אינו מספר אחים אפשרי

- 65** א. 5, 12, 8 ב. 166.2 ס"מ ג. המחלקה 160 עד 170 ד. 68%

- 66** א. 13 ב. 18 ג. הממוצע לא משתנה; סטיית התקן קטנה

- 67** א. בכיתה א'; בכיתה א' (שתי סטיות תקן מעל הממוצע, לעומת $\frac{2}{3}$ סטיית תקן בכיתה ב') ב. (1) לא נכון (2) נכון (3) לא נכון – היא לא משתנה (4) לא נכון

פרק 10 – הסתברות

- 70** א. 36 ב. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{11}{36}$ ד. $\frac{3}{4}$

- 71** א. 0.49; 0.22 ב. 0.4 ג. $\frac{22}{49} \approx 0.45$ ד. תלויים: $0.4 \neq 0.49$

- 72** א. $\frac{15}{28}$; $\frac{5}{14}$ ב. $\frac{3}{8}$ ג. $\frac{5}{7}$ ד. $\frac{3}{7}$

- 73** א. 0.032 ב. 0.375

- 74** א. 0.2 ב. כן: $0.2 = 0.4 \cdot 0.5$ ג. שתיהן 0.4, כמו $P(A)$ – הידיעה אם B קרה אינה משנה את ההסתברות של A

- 75** א. 0.512 ב. 0.384 ג. 0.992

- 76** א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{1}{15}$ ג. $\frac{8}{15}$

- 77** א. $\frac{4}{15}$ ב. $\frac{3}{4}$ ג. $\frac{3}{4}$

- 78** א. 0.4^n ב. $1 - 0.4^n$ ג. 6 זריקות $(0.4^5 \approx 0.0102)$, $(0.4^6 \approx 0.0041)$

פרק 11 – בוחן מסכם

- 1** א. 2.75; 3; 3 ב. ≈ 1.09 ג. 3.75 ד. 0.6

- 2** א. 0.58 ב. $\frac{21}{29} \approx 0.72$ ג. לא: $0.7 \neq 0.58$ ד. ≈ 0.49

- 3** א. $D(2, 4)$, $E(7, 4)$, $DE = 5$ ב. $y = -8x + 40$; מפגש התיכונים ג. 10; 40; $S_{CDE} : S_{ABC} = 1 : 4$ – המשולשים דומים ביחס 1 : 2 ד. $\approx 63.43^\circ$, $\approx 53.13^\circ$

- 4** א. 12; $\approx 67.38^\circ$ ב. $\sqrt{265} \approx 16.28$ ג. 3 : 8; $\frac{96}{11} \approx 8.73$

- 5** א. מקסי $(-1, 10)$, מיני $(3, -22)$ ב. עולה $-1 < x < 3$ או $x > 3$ יורדת $y = -9x + 5$ ד. 3

- 6** א. $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$; $f(-x) = -f(x)$ ב. מקסי $(2, 4)$, מיני $(-2, -4)$; מקסי קצה $(-2\sqrt{2}, 0)$, מיני קצה $(2\sqrt{2}, 0)$ ג. רוחב $2x$, גובה $\sqrt{8 - x^2}$; השטח $2f(x)$ מקסימלי ב- $x = 8$



נספח

דף הנוסחאות – 4 יחידות לימוד

בעמודים הבאים מצורף הנוסחאון הרשמי של משרד החינוך במתמטיקה ברמת 4 יחידות לימוד, כפי שהוא מופיע בבחינות הבגרות (שאלונים 035471 ו-035472).

בכיתה י' השתמשותם בעיקר בחלקים: **אלגברה**, **גאומטריה** (ישרים, פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר-זווית ושטחים), **נגזרות**, **הסתברות וסטטיסטיקה** (ממוצע וסטיית תקן). שאר הנושאים בדף – מעגל, משפט הסינוסים, סדרות, לוגריתמים, אינטגרלים, וקטורים ועוד – מחכים לכם בכיתות י"א וי"ב.

טיפ

פתרו את הבוחן המסכם (פרק 11) עם הדף הזה ביד – בדיוק כמו בבגרות. כך תלמדו מה כתוב בו, ומה צריך לזכור בעל-פה.

נוסחאון מתמטיקה

4 יחידות לימוד

אלגברה

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{השורשים:} \quad (a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{משוואה ריבועית:}$$

סדרות:

סדרה חשבונית	סדרה הנדסית	
$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$	כלל נסיגה:
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	איבר n-י:
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$ <p>סכום סדרה אינסופית שסכומה מתכנס:</p> $S = \frac{a_1}{1 - q}$	סכום:

חזקות: $(b \neq 0, a \neq 0)$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
--------------------------	--	---------------------------------	---------------------------	-----------------------------	---------------------------

גדילה ודעיכה: הכמות לאחר t יחידות זמן: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ כאשר q מקדם הגדילה / הדעיכה

$$q = 1 \pm \frac{p}{100} \quad (p - \text{אחוז הגדילה / הדעיכה ביחידות זמן})$$

לוגריתמים (לפי אילוצי תחום ההגדרה):

$\log_a x = b \quad \text{שקול ל-} \quad a^b = x$	$\log_a(a^b) = b$	$a^{\log_a x} = x$
$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$	$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

גאומטריה

השיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) , שאינו מאונך לציר ה- x :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר ששיפועו m , העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

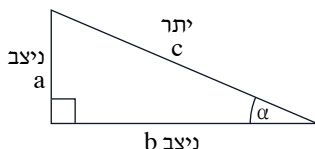
שני ישרים, בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) ורדיוסו R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

הזווית החדה α שבין ישר מהצורה $y = mx + b$ ובין ציר ה- x :

$$\tan \alpha = |m|$$


פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זווית:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{משפט פיתגורס:}$$

זהויות טריגונומטריות:

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
---	--	---	---

(R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{משפט הסינוסים:}$$

צורות במישור:

(α היא הזווית הכלואה בין הצלעות b ו- c)

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{שטח משולש:}$$

(h – גובה לצלע a)

$$S = a \cdot h \quad \text{שטח מקבילית:}$$

(a, b – בסיסי הטרפז, h – גובה)

$$S = \frac{(a + b) \cdot h}{2} \quad \text{שטח טרפז:}$$

(R – רדיוס)

$$P = 2\pi \cdot R$$

היקף מעגל:

$$S = \pi \cdot R^2$$

שטח עיגול:

גופים במרחב:

(S – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

$$V = \frac{S \cdot h}{3}$$

נפח פירמידה:

$$V = S \cdot h \quad \text{נפח מנסרה:}$$

$$F = M + 2 \cdot S \quad \text{שטח פנים של מנסרה:}$$

(M – סכום שטחי הפאות הצדדיות – שטח המעטפת, S – שטח הבסיס)

$$F = M + S \quad \text{שטח פנים של פירמידה:}$$

וקטורים:

בהינתן הווקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ו- $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$|\underline{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} \quad \text{אורך של וקטור:}$$

(α היא זווית בין הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$)

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \quad \text{מכפלה סקלרית:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \text{זווית } \alpha \text{ בין וקטורים } \underline{u}, \underline{v}:$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$	$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t ממשי)
$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$	$[(f(x))^t]' = t \cdot [f(x)]^{t-1} \cdot f'(x)$ (t ממשי)

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציית מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$

$u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

אינטגרלים ($m \neq 0$):

$\int (mx + b)^t dx = \frac{(mx + b)^{t+1}}{m \cdot (t+1)} + C$ (t ממשי, $t \neq -1$)	$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C$ (t ממשי, $t \neq -1$)
$\int \frac{a}{(mx + b)^2} dx = \frac{-a}{m \cdot (mx + b)} + C$	$\int \frac{a}{x^2} dx = -\frac{a}{x} + C$
$\int e^{mx + b} dx = \frac{e^{mx + b}}{m} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{mx + b} dx = \frac{\ln mx + b }{m} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

הסתברות

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית:

הסתברות של A וגם B כאשר A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

סטטיסטיקה

$f_1, f_2, \dots, f_n$ הם השכיחויות של $x_1, x_2, \dots, x_n$ בהתאמה, ו- $N = f_1 + f_2 + \dots + f_n$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{N}$$

ממוצע:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

$$r = \frac{1}{N \cdot S_x \cdot S_y} [(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})]$$

מקדם המתאם r :

$$r = \frac{1}{N} [(z_x)_1 (z_y)_1 + \dots + (z_x)_N (z_y)_N]$$

משוואת ישר הרגרסיה: $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$

שיפוע m של ישר הרגרסיה: $m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$

צינון תקן: $z = \frac{x - \bar{x}}{S}$

$P(z > z_x) = P(z < -z_x)$	$P(z > z_x) = 1 - P(z < z_x)$	$P(z_1 < z < z_2) = P(z < z_2) - P(z < z_1)$
----------------------------	-------------------------------	--

טבלת התפלגות נורמלית

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0046	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0135	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0227	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0350	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0550	0.0540	0.0530	0.0520	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0670	0.0650	0.0640	0.0630	0.0620	0.0610	0.0590	0.0580	0.0570	0.0560
-1.4	0.0810	0.0790	0.0780	0.0760	0.0750	0.0740	0.0720	0.0710	0.0690	0.0680
-1.3	0.0970	0.0950	0.0930	0.0920	0.0900	0.0890	0.0870	0.0850	0.0840	0.0820
-1.2	0.1150	0.1130	0.1110	0.1090	0.1070	0.1060	0.1040	0.1020	0.1000	0.0980
-1.1	0.1360	0.1340	0.1310	0.1290	0.1270	0.1250	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1590	0.1560	0.1540	0.1520	0.1490	0.1470	0.1450	0.1420	0.1400	0.1380
-0.9	0.1840	0.1810	0.1790	0.1760	0.1740	0.1710	0.1680	0.1660	0.1630	0.1610
-0.8	0.2120	0.2090	0.2060	0.2030	0.2000	0.1980	0.1950	0.1920	0.1890	0.1870
-0.7	0.2420	0.2390	0.2360	0.2330	0.2300	0.2270	0.2240	0.2210	0.2180	0.2150
-0.6	0.2740	0.2710	0.2680	0.2640	0.2610	0.2580	0.2550	0.2510	0.2480	0.2450
-0.5	0.3080	0.3050	0.3010	0.2980	0.2950	0.2910	0.2880	0.2840	0.2810	0.2780
-0.4	0.3450	0.3410	0.3370	0.3340	0.3300	0.3260	0.3230	0.3190	0.3160	0.3120
-0.3	0.3820	0.3780	0.3750	0.3710	0.3670	0.3630	0.3590	0.3560	0.3520	0.3480
-0.2	0.4210	0.4170	0.4130	0.4090	0.4050	0.4010	0.3970	0.3940	0.3900	0.3860
-0.1	0.4600	0.4560	0.4520	0.4480	0.4440	0.4400	0.4360	0.4320	0.4290	0.4250
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4800	0.4760	0.4720	0.4680	0.4640
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5200	0.5240	0.5280	0.5320	0.5360
0.1	0.5400	0.5440	0.5480	0.5520	0.5560	0.5600	0.5640	0.5680	0.5710	0.5750
0.2	0.5790	0.5830	0.5870	0.5910	0.5950	0.5990	0.6030	0.6060	0.6100	0.6140
0.3	0.6180	0.6220	0.6250	0.6290	0.6330	0.6370	0.6410	0.6440	0.6480	0.6520
0.4	0.6550	0.6590	0.6630	0.6660	0.6700	0.6740	0.6770	0.6810	0.6840	0.6880
0.5	0.6920	0.6950	0.6990	0.7020	0.7050	0.7090	0.7120	0.7160	0.7190	0.7220
0.6	0.7260	0.7290	0.7320	0.7360	0.7390	0.7420	0.7450	0.7490	0.7520	0.7550
0.7	0.7580	0.7610	0.7640	0.7670	0.7700	0.7730	0.7760	0.7790	0.7820	0.7850
0.8	0.7880	0.7910	0.7940	0.7970	0.8000	0.8020	0.8050	0.8080	0.8110	0.8130
0.9	0.8160	0.8190	0.8210	0.8240	0.8260	0.8290	0.8320	0.8340	0.8370	0.8390
1.0	0.8410	0.8440	0.8460	0.8480	0.8510	0.8530	0.8550	0.8580	0.8600	0.8620
1.1	0.8640	0.8660	0.8690	0.8710	0.8730	0.8750	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8850	0.8870	0.8890	0.8910	0.8930	0.8940	0.8960	0.8980	0.9000	0.9020
1.3	0.9030	0.9050	0.9070	0.9080	0.9100	0.9110	0.9130	0.9150	0.9160	0.9180
1.4	0.9190	0.9210	0.9220	0.9240	0.9250	0.9260	0.9280	0.9290	0.9310	0.9320
1.5	0.9330	0.9350	0.9360	0.9370	0.9380	0.9390	0.9410	0.9420	0.9430	0.9440
1.6	0.9450	0.9460	0.9470	0.9480	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9650	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9954	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9